NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1857.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie,
Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME SEIZIÈME

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1857

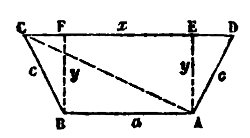

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (1856).



On donne la plus petite des deux bases AB, CD, *d'un trapèze* ABCD, *et la longueur des côtés non parallèles* BC, AD *supposés égaux entre eux : déterminer le maximum de l'aire du trapèze.*

Menons des points A, B les perpendiculaires AE, BF sur CD, et posons

$$AB = a,\quad BC = AD = c,\quad CD = x,\quad AE = BF = y.$$

L'aire du trapèze sera exprimée par $\left(\frac{x+a}{2}\right) y$. D'ailleurs les triangles rectangles ADE, BCF étant égaux entre eux, on aura

$$DE = FC,$$

et, par suite,

$$DE = \frac{CD - AB}{2} = \frac{x - a}{2}.$$

Ce qui donnera

$$y=\sqrt{c^2-\left(\frac{x-a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4c^2-(x-a)^2}.$$

De là résulte

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)y=\frac{1}{4}\sqrt{(x+a)^2[4c^2-(x-a)^2]}.$$

Il s'agit donc de trouver la valeur de x qui rend *maximum* le produit $(x+a)^2[4c^2-(x-a)^2]$ que l'on peut écrire ainsi :

$$(1)\qquad (x+a)(x+a)(x+2c-a)(2c+a-x).$$

Cela posé, désignons par α, 6, γ trois nombres quelconques et mettons le produit (1) sous cette forme :

$$\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+2c-a}{6}\right)\left(\frac{2c+a-x}{\gamma}\right)\times\alpha^2 6\gamma.$$

Le nombre $\alpha^2 6\gamma$ étant constant, il est clair que le maximum cherché correspond au maximum de

$$(2)\quad \left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+2c-a}{6}\right)\left(\frac{2c+a-x}{\gamma}\right).$$

Or, les valeurs des nombres α, 6, γ étant arbitraires, on en pourra disposer de manière que la somme des quatre facteurs

$$\frac{x+a}{\alpha},\quad \frac{x+a}{\alpha},\quad \frac{x+2c-a}{6},\quad \frac{2c+a-x}{\gamma},$$

soit constante, c'est-à-dire indépendante de x; il suffit, pour cela, d'attribuer aux nombres α, 6, γ des valeurs telles, que le coefficient de x dans la somme dont il s'agit

soit nul. Ce qui donne

(3) $$\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{6}-\frac{1}{\gamma}=0.$$

Cette première condition étant supposée remplie, il faudra, pour que le produit (2) soit maximum, que ses facteurs soient égaux entre eux. On aura donc

(4) $$\frac{x+a}{\alpha}=\frac{x+2c-a}{6},$$

(5) $$\frac{x+a}{\alpha}=\frac{2c+a-x}{\gamma};$$

la valeur positive de x déduite du système des équations (3), (4), (5) représentera la plus grande des deux bases du trapèze maximum (*).

Des équations (4) et (5), on tire

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x+a}{x+2c-a}\right),$$

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x+a}{2c+a-x}\right);$$

et, en remplaçant $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{\gamma}$ par les expressions précédentes, dans (3), il vient

$$2+\frac{x+a}{x+2c-a}-\frac{x+a}{2c+a-x}=0,$$

d'où

$$2[4c^2-(x-a)^2]+2(x+a)(a-x)=0.$$

(*) Cette méthode élémentaire pour résoudre quelques questions relatives au maximum et au minimum d'une fonction d'une seule variable a été indiquée par M. Grillet, professeur au lycée de Brest (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 70). G.

En développant et réduisant, on trouve l'équation

$$(6) \qquad x^2 - ax - 2c^2 = 0,$$

dont la racine positive

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

est la plus grande des deux bases du trapèze cherché. Les quatre côtés du trapèze étant déterminés, il sera facile de le construire et d'avoir l'expression de sa surface en fonction des données a, c.

L'équation (6)

$$x^2 - ax - 2c^2 = 0.$$

donne

$$x(x - a) = 2c^2$$

ou

$$x\left(\frac{x-a}{2}\right) = c^2.$$

Or,

$$x = \text{CD}$$

et

$$\frac{x-a}{2} = \text{DE},$$

donc

$$\text{CD} \times \text{DE} = \overline{\text{DA}}^2.$$

Cette dernière égalité montre que le triangle CAD est rectangle en A. Il s'ensuit que CD est le diamètre du cercle circonscrit au trapèze.

Lorsque $c = a$, la valeur de

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

se réduit à $2a$, les côtés CB, BA, AD sont égaux au rayon du cercle circonscrit au trapèze dont le diamètre est CD. Et chacun des deux angles DAB, ABC est égal à 120 degrés. G.

SOLUTION DE LA QUESTION 345

(voir tome XV, page 383);

PAR M. DE ROCHAS,
Élève à l'école préparatoire de Sainte-Barbe (classe de M. Gerono),

ET M. GRELLEY,
Élève à la même école (classe de M. Vieille.)

$f(x) = 0$ est une équation à coefficients entiers; si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation n'a pas de racines entières. (GAUSS.)

Le polynôme $f(x)$ étant un polynôme algébrique entier, pourra se mettre sous la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

m étant un nombre entier. Nous aurons alors

$$f(0) = A_m$$

et

$$f(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + A_m,$$

$f(0)$ et $f(1)$ étant, par hypothèse, deux nombres impairs.

Supposons que l'équation

$$f(x) = 0$$

admette une racine entière a, elle sera paire ou impaire. Dans le premier cas, chacun des m premiers termes de $f(a)$ étant pair, puisque les coefficients sont entiers,

leur somme le sera aussi, et, par suite, cette somme augmentée d'un nombre impair A_m, ne pourra pas devenir nulle.

Dans le second cas, nous pourrons remarquer que les puissances du nombre a seront toutes impaires et que, par suite, chacun des m premiers termes de $f(a)$ étant de même parité que son coefficient, la somme de ces termes sera de même parité que la somme des m premiers coefficients. Mais cette somme est égale à $f(1) - f(0)$: elle est donc paire; par conséquent, la somme des m premiers termes de $f(a)$ sera paire comme dans le cas précédent et ne pourra pas être annulée par l'addition d'un nombre impair A_m.

Le nombre a, ne pouvant être ni pair ni impair, ne sera pas entier. C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA MÊME QUESTION 345

PAR M. P. R.,
Élève du lycée Bonaparte.

Soit

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

le polynôme proposé. k étant un nombre entier quelconque, de même que k', on suppose que

$$f(0) = A_m = 2k + 1,$$
$$f(1) = A_0 + A_1 + \ldots + A_{m-1} + A_m = 2k' + 1.$$

Aucun nombre p entier mis à la place de x ne satisfait à l'équation

$$f(x) = 0.$$

En effet, effectuons la substitution. Il vient

$$A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} + \ldots + A_{m-1} p + A_m.$$

Si p est pair, tous les termes le sont, à l'exception de A_m; donc la somme algébrique de ces termes n'est pas nulle.

Si p est impair, la somme des termes

$$(1)\qquad A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots + A_{m-1} p$$

est encore paire. Car

$$f(1) - f(0) = 2k - 2k' = 2(k - k').$$

Donc le nombre des coefficients impairs de (1) est pair. Donc leur somme algébrique est paire. La somme algébrique des termes de (1) à coefficients pairs est encore paire. Donc enfin le polynôme (1) est pair, et, par suite, le polynôme

$$A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots + A_{m-1} p + A_m$$

n'est pas nul, puisque A_m est impair.

LETTRE SUR LA MÉTHODE DE M. PARMENTIER

(voir t. XIV, p. 370).

Je trouve dans vos *Nouvelles Annales* (octobre 1855) une formule nouvelle de M. Parmentier pour la quadrature des courbes planes. L'auteur affirme que cette formule est toujours préférable à celle de M. Poncelet, mais cette assertion ne me paraît pas fondée.

Considérons en effet une courbe tournant sa concavité vers l'axe des x. Je suppose la base du segment divisée en parties égales, et les trapèzes inscrits et circonscrits de M. Poncelet construits sur les divisions de la base. Soient A la somme des trapèzes inscrits, A' celle des trapèzes circonscrits et S l'aire exacte du segment. On a,

suivant les cas,

$$\frac{A + A'}{2} \gtrless S.$$

Je suppose $\frac{A + A'}{2}$ plus grand que S.

En comparant la formule de M. Parmentier à celle de M. Poncelet, on trouve

$$\frac{A + 2A'}{3} - \frac{A + A'}{2} = \frac{A' - A}{6},$$

A' étant évidemment plus grand que A, on a

$$\frac{A + 2A'}{3} > \frac{A + A'}{2}.$$

Donc, puisque, par hypothèse, la formule de M. Poncelet donne une valeur trop grande, celle de M. Parmentier sera moins approchée qu'elle.

En considérant une courbe qui tourne sa concavité vers le haut, on verrait de la même manière que toutes les fois que la formule de M. Poncelet est approchée par défaut, elle est plus exacte que celle de M. Parmentier.

Un Abonné.

RÉPONSE A LA PRÉCÉDENTE LETTRE.

Je vous renvoie la Note critique que vous m'avez communiquée relativement à ma formule de quadrature. Votre *abonné* dit : « L'auteur affirme que cette formule est toujours préférable à celle de M. Poncelet, mais cette assertion ne me paraît pas fondée. » D'abord je n'*affirme* rien, je *démontre* que lorsque les éléments dans lesquels

on partage la courbe sont assez petits, ma formule est beaucoup plus approchée que celle de M. Poncelet, et cette assertion n'est ni plus ni moins fondée qu'un théorème quelconque d'algèbre ou de géométrie. J'ai donc lieu d'être fort étonné de voir contester une chose évidemment incontestable par tous ceux qui ont compris les considérations analytiques qui m'ont conduit à modifier la formule de M. Poncelet, et je pourrais laisser sans réponse le singulier raisonnement de votre abonné. Je veux pourtant dire en quoi il pèche, ne fût-ce que pour l'édification personnelle de son auteur.

Considérant le cas d'une courbe concave vers l'axe des abscisses, votre abonné dit que l'on a, suivant les cas,

$$\frac{A + A'}{2} \gtrless S,$$

et il prend le cas où $\frac{A + A'}{2} > S$. A partir de là son raisonnement est irréprochable, et il démontre que dans ce cas $\frac{A + A'}{2}$ est plus approché de S que $\frac{A + 2A'}{3}$, c'est-à-dire que la formule de M. Poncelet donne un résultat plus approché que la mienne. Il n'y a qu'un petit malheur à cela, c'est que le *cas* examiné par l'auteur ne peut jamais se présenter. Si votre abonné avait lu ma Note avec un peu plus d'attention, il aurait vu que je démontre (p. 379) que $S - A'$ est plus petit que $S - A$ (en valeur absolue), ou, en d'autres termes, que la somme des aires des trapèzes circonscrits est plus rapprochée de l'aire de la courbe que la somme des aires des trapèzes inscrits. Or, dans le cas d'une courbe concave vers l'axe des abscisses, A' est plus grand que A, et comme S est plus approché de la plus grande de ces deux quantités, il s'ensuit que S est plus grand que leur moyenne arithmétique,

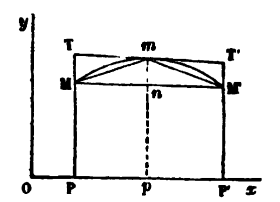
et que l'on a

$$\frac{A + A'}{2} < S.$$

Votre abonné part donc d'une hypothèse absurde en posant

$$\frac{A + A'}{2} > S.$$

Avant d'établir par des considérations de séries que $S - A$ est plus grand que $S - A'$ (en valeur absolue), j'avais dit (p. 372) qu'il est facile de voir *par de simples considérations géométriques* que la somme des aires des trapèzes circonscrits conduit à un résultat plus approché que celle des trapèzes inscrits, mais je n'avais pas cru devoir démontrer cette proposition élémentaire. Comme votre abonné ne s'en est pas rendu compte, ce qui l'a fait tomber dans son raisonnement paradoxal, je répare ici cette omission.



Soit

$$Pp = pP'.$$

Il s'agit de démontrer que la différence entre l'aire inscrite et la courbe est plus grande que celle entre l'aire circonscrite et la courbe, ou que le segment curviligne MmM' est plus grand que la somme des segments curvilignes $MTm + mT'M'$.

Menons les cordes Mm et mM'. Il est facile de voir

que le triangle MmM' est égal à la somme des triangles $MTm + mT'M'$. En effet, on a

$$\text{triangle } MmM' = \frac{MM' \times mn}{2} = Pp \times mn,$$

$$\text{triangle } MTm = \frac{MT \times Mn}{2} = Pp \times \frac{MT}{2},$$

$$\text{triangle } m\,T'\,M' = \frac{M'T' \times M'n}{2} = Pp \times \frac{M'\,T'}{2},$$

et somme des triangles

$$MTm + m\,T'\,M' = Pp\,\frac{(MT + M'T')}{2} = Pp \times mn,$$

même expression que pour le triangle MmM'.

Or l'aire curviligne MmM' est évidemment plus grande que le triangle MmM', et la somme des aires curvilignes $MTm + mT'M'$ plus petite que la somme des triangles de même nom. Donc, enfin, l'aire curviligne MmM' est plus grande que la somme des aires curvilignes

$$MmT + mT'M' \ (*).$$

(*) Je profite de cette occasion pour dire aux lecteurs des *Nouvelles Annales* qu'étant devant Sébastopol lors de l'impression du numéro d'octobre 1855, je n'ai pu surveiller moi-même la correction des épreuves, et pour les prier de vouloir bien corriger eux-mêmes plusieurs fautes essentielles signalées dans les *errata* du numéro.

THÉODORE PARMENTIER.

SOLUTION DE LA QUESTION 340

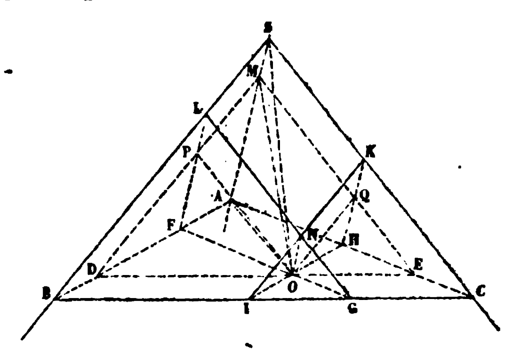
(voir page 29) ;

PAR M. CH. MOREAU,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Soient donnés un angle trièdre de sommet S et un point fixe O par lequel on mène un plan coupant les faces de l'angle suivant le triangle ABC ; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point O partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles ; v_1, v_2, v_3 étant les valeurs de trois pyramides ayant pour bases ces parallélogrammes et S pour sommet commun, la somme

$$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}$$

est contante, de quelque manière qu'on mène le plan coupant par le point fixe O.



Je mène par le point O trois plans OM, OK, OL respectivement parallèles aux trois faces de l'angle trièdre,

le plan OM coupe SA en M, le plan OK coupe SC en K et le plan OL coupe SB en L : ces trois plans coupent le plan ABC suivant les trois droites DE, FG, IH menées parallèlement aux côtés du triangle ABC, savoir DE parallèle à BC, FG parallèle à AC, IH parallèle à AB, et, de plus, ils forment un parallélipipède avec les trois faces de l'angle trièdre.

Considérons maintenant la pyramide ayant pour base le parallélogramme OFAH et pour sommet S; elle peut être regardée comme la somme de deux pyramides ayant pour bases le même triangle SAO et pour hauteurs les distances des points F et H à ce plan. On aura donc, en appelant f et h ces deux distances,

$$\text{SAFOH} = \frac{1}{3} \times \text{SAO} \times (h + f).$$

La pyramide SMPOQ aura de même pour mesure

$$\text{SMPOQ} = \frac{1}{3} \times \text{SOM} \times (p + q),$$

en appelant p et q les distances des points P et Q au plan SOM.

Or on a

$$f = p, \quad h = q,$$

car les lignes FP et HQ sont parallèles à SA, et, par suite, au plan SAO. On a donc

$$\frac{\text{SAFOH}}{\text{SMPOQ}} = \frac{\text{SAO}}{\text{SOM}} = \frac{\text{SA}}{\text{SM}};$$

on tire de là, en posant $\text{SAFOH} = v_1$,

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{\text{SMPOQ}} \times \frac{\text{SM}}{\text{SA}}.$$

On démontrera de même que l'on a

$$\frac{1}{SBIOD}=\frac{1}{v_2}=\frac{1}{SLPON}\times\frac{SL}{SB}$$

et

$$\frac{1}{v_3}=\frac{1}{SKNOQ}\times\frac{SK}{SC}.$$

Or

$$SMPOQ=SLPON=SKNOQ,$$

car chacune de ces trois pyramides est le tiers du même parallélipipède SLNKMPOQ; on a donc, en appelant v le volume de l'une de ces pyramides,

$$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}=\frac{1}{v}\left(\frac{SM}{SA}+\frac{SL}{SB}+\frac{SK}{SC}\right).$$

Or

$$\frac{SL}{SB}=\frac{CG}{CB},\quad \frac{SK}{SC}=\frac{BI}{BC},$$

donc

$$\frac{SL}{SB}+\frac{SK}{SC}=\frac{CG+BI}{BC}=\frac{BE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AM}{AS};$$

comme il faut encore y ajouter le rapport $\frac{SM}{SA}$, on a

$$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}=\frac{1}{v}\left(\frac{AM}{AS}+\frac{MS}{AS}\right)=\frac{1}{v}.$$

Donc la somme des inverses de ces trois pyramides est constante et égale à l'inverse de l'une des pyramides SMPOQ ou à trois fois l'inverse du parallélipipède OS.

Note. Prochainement une solution trigonométrique de M. Richard Oxamendy.

SOLUTION DE LA QUESTION 346

(voir tome XV, page 387);

PAR M. G. FORESTIER,
Élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
(classe de M. Briot).

Soient a, b, c,..., f, n arcs du premier quadrant; je supposerai que a est le plus grand de ces arcs et que f est le plus petit. Nous avons

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c + \ldots + \sin f}{\cos a + \cos b + \cos c + \ldots + \cos f} = q,$$

et nous voulons démontrer que l'on a

$$\tang f < q < \tang a.$$

Or, dans le premier quadrant, le sinus du plus grand arc est le plus grand sinus et son cosinus est le plus petit. Par conséquent, en remplaçant au numérateur chaque sinus par $\sin a$ et au dénominateur chaque cosinus par $\cos a$, nous augmentons la valeur de la fraction et nous avons

$$\frac{n \sin a}{n \cos a} > q$$

ou

$$\tang a > q.$$

De même, en remplaçant chaque sinus par $\sin f$ et chaque cosinus par $\cos f$, on diminue la valeur de la fraction, et l'on a

$$\frac{n \sin f}{n \cos f} < q \quad \text{ou} \quad \tang f < q,$$

par suite,

$$\text{tang} f < q < \text{tang} a.$$

C. Q. F. D.

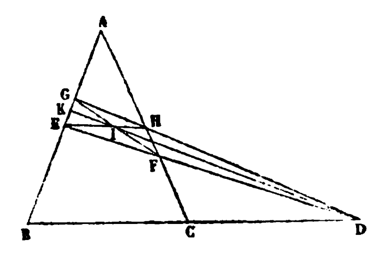
C'est aussi un cas particulier de ce théorème général : $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ étant n expressions fractionnaires écrites suivant un ordre de grandeur croissante, l'expression $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ est comprise entre $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_n}{b_n}$.

SOLUTION DE LA QUESTION 338

(voir t. XV, p. 290);

PAR M. JOZON,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

D'après l'énoncé de la question, je prolonge la base du triangle isocèle ABC d'une longueur CD égale à BC. Je



joins le point D au point E, milieu de AB, et le point F se trouvant le point d'intersection des médianes du triangle ABD, on a

$$CF = \frac{1}{3} AC.$$

Je porte $AG = CF$ et je mène DG qui rencontre AC

en H; soit I le point d'intersection des diagonales du quadrilatère GHFE, je mène DI qui rencontre AB en K. Je dis que

$$AB = 15\,GK = 10\,EK.$$

Le triangle DEG, coupé par la transversale FHA, donne

$$(1) \qquad GH \times DF \times EA = GA \times FE \times HD.$$

Mais les côtés de ce triangle sont aussi partagés en segments qui sont en involution, par les lignes DK, EH, GF partant des trois sommets et se coupant en un même point. On a donc

$$(2) \qquad GH \times DF \times EK = GK \times FE \times HD.$$

Divisant membre à membre l'équation (1) par l'équation (2), j'ai

$$\frac{EA}{EK} = \frac{GA}{GK}$$

ou

$$\frac{AB}{2\,EK} = \frac{AB}{3\,GK},$$

ou enfin

$$2\,EK = 3\,GK.$$

Du reste on a aussi

$$EK + GK = EA - GA = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) AB = \frac{1}{6} AB.$$

Je remplace dans cette égalité EK par $\frac{3}{2}$GK et j'ai

$$GK\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{AB}{6},$$

d'où

$$GK = \frac{AB}{15}$$

et

$$EK = \frac{AB}{6} - \frac{AB}{15} = \frac{AB}{10}.$$

C. Q. F. D.

Note. MM. Léopold Sylvestre, du collége Rollin (classe de M. Suchet), Moreau, du lycée Louis-le-Grand, et le P. Rochette ont résolu la quest on à peu près de la même manière.

SOLUTION DE LA QUESTION 344

(voir t. XV, p. 262);

PAR MM. A. PICART ET BOURDELLES,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Un point fixe O est donné dans un angle plan A. Par O, on mène une transversale rencontrant les côtés de l'angle en B et en C, S et S' étant les aires des triangles OBA, OCA, la somme $\frac{1}{S} + \frac{1}{S'}$ est constante, quelle que soit la manière dont on mène la transversale.

Soient OB', OC' les perpendiculaires abaissées du point O sur les côtés AB, AC. J'aurai

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{2}{AB.OB'} + \frac{2}{AC.OC'} = \frac{2(AB.OB' + AC.OC')}{AB.AC.OB'.OC'}.$$

Or

$$AB.OB' + AC.OC' = AB.AC \sin A.$$

Donc

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{2\,AB.AC\sin A}{AB.AC.OB'.OC'}=\frac{2\sin A}{OB'.OC'}=\text{constante}.$$

C. Q. F. D.

On aurait pu du reste arriver à priori à cette expression $\frac{2\sin A}{OB'.OC'}$ de la constante.

En effet, si je mène la transversale OO' de manière qu'elle soit parallèle à l'un des côtés de l'angle, la somme $\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}$ se réduit à $\frac{1}{S}$. Or

$$S=\frac{\overline{AO}^2\times\sin O'AO\sin OAC'}{2\sin A}.$$

Mais

$$AO\sin O'AO=OB',$$
$$AO\sin OAC'=OC';$$

donc

$$\frac{1}{S}=\frac{2\sin A}{OB'.OC'}.$$

Il serait facile de voir que le théorème subsiste encore quand la transversale rencontre un côté et le prolongement de l'autre, ou bien encore quand le point O est à l'extérieur de l'angle. Alors la somme se change en différence. L'énoncé général exige qu'on dise la somme *algébrique*.

SOLUTION DE LA QUESTION 354

(voir t. XV, p. 464);

PAR MM. BOYELDIEU ET A. SILVESTRE,
Élèves de M. Catalan.

On donne quatre droites $A = o$, $B = o$, $C = o$, $D = o$ et un point O dans leur plan; on joint ce plan au point d'intersection de $A = o$ et $B = o$, et l'on prend la conjuguée harmonique de cette droite par rapport au système (A, B); on fait de même par rapport au système (C, D). Ces deux droites se coupent en un point (1). On opère de même par rapport aux systèmes (A, C) et (B, D), puis (A, D) et (B, C). On obtient ainsi deux nouveaux points d'intersection (2) et (3) en ligne droite avec le premier.

Démonstration.

Si A_1, B_1, C_1, D_1 sont les valeurs que prennent les premiers membres des équations de nos droites quand on y remplace les coordonnées variables par celles du point O,

$$\frac{A}{A_1} - \frac{B}{B_1} = o$$

sera la forme de l'équation des droites joignant le point O aux points d'intersection des droites données.

On sait d'ailleurs que les deux droites $P + \lambda Q = o$, $P - \lambda Q = o$ sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites $P = o$ et $Q = o$.

Ceci étant, les équations de nos conjuguées harmoni-

ques pourront se mettre sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{A_1}+\dfrac{B}{B_1}=0, \\ \dfrac{C}{C_1}+\dfrac{D}{D_1}=0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{A_1}+\dfrac{C}{C_1}=0, \\ \dfrac{B}{B_1}+\dfrac{D}{D_1}=0, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{A_1}+\dfrac{D}{D_1}=0, \\ \dfrac{B}{B_1}+\dfrac{C}{C_1}=0, \end{cases}$$

d'où l'on voit immédiatement que la droite

$$\frac{A}{A_1}+\frac{B}{B_1}+\frac{C}{C_1}+\frac{D}{D_1}=0$$

passe par les trois points d'intersection dont il s'agit.

Note. Un abonné de Marseille fait observer que dans un quadrilatère plan les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les droites qui joignent les milieux des deux diagonales se coupent en un même point. La perspective de cette figure donne le théorème 353 dont le théorème 354 est le corrélatif. L'élégant mode de solution de MM. Boyeldieu et Silvestre s'applique avec un égal succès au théorème 353.

3°. $(D^n Fx)_0$ = valeur que prend la dérivée d'ordre n de $F(x)$ lorsqu'on y fait $x = 0$.

2. *Lemme.*

$$(1)\ \sin^{2k} x = \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot(2k)_k - (2k)_{k-1}\cos 2x \\ + (2k)_{k-2}\cos 4x - (2k)_{k-3}\cos 6x + \ldots\end{array}\right],$$

$$D^{2n}\cos\mu x = (-1)^n \mu^{2n}\cos\mu x,$$

$$(D^{2n}\cos\mu x)_0 = (-1)^n \mu^{2n},$$

$$(2)\ (D^{2n}\sin^{2k} x)_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2k-1}}\left[\begin{array}{l}-(2k)_{k-1}2^{2n} + (2k)_{k-2}4^{2n} \\ -(2k)_{k-3}6^{2n} + \ldots\end{array}\right],$$

3. *Lemme.*

$$\sin^{2k-1} x = \frac{1}{2^{2k-2}}\left[\begin{array}{l}(2k-1)_{k-1}\sin x - (2k-1)_{k-2}\sin 3x \\ + (2k-1)_{k-4}\sin 4x - \ldots\end{array}\right],$$

d'où

$$(3)\left\{\begin{array}{l}(D^{2n-1}\sin 2^{k-1}x)_0 \\ = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2k-2}}\left[\begin{array}{l}(2k-1)_{k-1}.1^{2n-1} - (2k-1)_{k-3}.3^{2n-1} \\ + (2k-1)_{k-5}.5^{2n-1} - \ldots\end{array}\right].\end{array}\right.$$

4. *Lemme.*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

Sécante.

5. Soit

$$\text{séc}\,x = 1 + \frac{T_2}{2!}x^2 + \frac{T_4 x^4}{4!} + \ldots + \frac{T_{2n}x^{2n}}{2n!} + \ldots,$$

d'où

$$T_{2n} = (D^{2n}\,\text{séc}\,x)_0\,;$$

or

$$\text{séc}\,x = (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 x + \ldots + \frac{1.3.5\,(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\sin^{2n} x\right]$$

$$+ \left[\frac{1.3.5\ldots 2n+1}{2.4.6\ldots 2n+2}\sin^{2n+2} x + \ldots\right].$$

Dans la seconde partie entre parenthèses, remplaçons $\sin x$ par sa valeur en x (*lemme* 4), on aura une série de cette forme

$$a_0 x^{2n+2} + a_2 x^{2n+4} + a_3 x^{2n+6} + \ldots = S(x)$$

et

$$[D^{2n} S(x)]_0 = 0;$$

donc

$$T_{2n} = \frac{1}{2}(D^{2n}\sin^2 x)_0 + \frac{1.3}{2.4}(D^{2n}\sin^4 x)_0 + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.5.6\ldots 2n}(D^{2n}\sin^{2n} x)_0].$$

Faisant donc dans la formule (2) (lemme 2) k successivement égal à 1.2.3... n, on obtient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} T_{2n} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2_0.2^{2n}] \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{2^3}[4_1.2^{2n} - 4_0.4^{2n}] \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{2^5}[6_2.2^{2n} - 6_1.4^{2n} + 6_0.6^{2n}] \\ &+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}} \\ &\times \left[\begin{matrix}(2n)_{n-1}.2^{2n} - (2n)_{n-2}.4^{2n}\ldots \\ \pm (2n)_0\,(2n)^{2n}\end{matrix}\right]. \end{aligned}\right.$$

3°. $(D^n Fx)_0 =$ valeur que prend la dérivée d'ordre n de $F(x)$ lorsqu'on y fait $x = 0$.

2. *Lemme.*

$$(1)\sin^{2k} x = \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot(2k)_k - (2k)_{k-1}\cos 2x \\ +(2k)_{k-2}\cos 4x - (2k)_{k-3}\cos 6x + \ldots\end{array}\right],$$

$$D^{2n}\cos\mu x = (-1)^n \mu^{2n}\cos\mu x,$$

$$(D^{2n}\cos\mu x)_0 = (-1)^n \mu^{2n},$$

$$(2)\ (D^{2n}\sin^{2k} x)_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2k-1}}\left[\begin{array}{l}-(2k)_{k-1}2^{2n} + (2k)_{k-2}4^{2n} \\ -(2k)_{k-3}6^{2n} + \ldots\end{array}\right],$$

3. *Lemme.*

$$\sin^{2k-1} x = \frac{1}{2^{2k-2}}\left[\begin{array}{l}(2k-1)_{k-1}\sin x - (2k-1)_{k-2}\sin 3x \\ +(2k-1)_{k-4}\sin 4x - \ldots\end{array}\right],$$

d'où

$$(3)\left\{\begin{array}{l}(D^{2n-1}\sin 2^{k-1}.x)_0 \\ = \frac{(-1)^{\mu+1}}{2^{2k-2}}\left[\begin{array}{l}(2k-1)_{k-1}.1^{2n-1} - (2k-1)_{k-3}.3^{2n-1} \\ +(2k-1)_{k-5}.5^{2n-1} - \ldots\end{array}\right].\end{array}\right.$$

4. *Lemme.*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

Sécante.

5. Soit

$$\text{séc}\,x = 1 + \frac{T_2}{2!}x^2 + \frac{T_4 x^4}{4!} + \ldots + \frac{T_{2n}.x^{2n}}{2n!} + \ldots,$$

d'où

$$T_{2n} = (D^{2n}\,\text{séc}\,x)_0;$$

or

$$\text{séc}\,x = (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 x + \ldots + \frac{1.3.5\,(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\sin^{2n} x\right]$$

$$+ \left[\frac{1.3.5\ldots 2n+1}{2.4.6\ldots 2n+2}\sin^{2n+2} x + \ldots\right].$$

Dans la seconde partie entre parenthèses, remplaçons $\sin x$ par sa valeur en x (*lemme* 4), on aura une série de cette forme

$$a_0 x^{2n+2} + a_2 x^{2n+4} + a_3 x^{2n+6} + \ldots = \mathrm{S}(x)$$

et

$$[\mathrm{D}^{2n}\mathrm{S}(x)]_0 = 0;$$

donc

$$\mathrm{T}_{2n} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^{2n}\sin^2 x)_0 + \frac{1.3}{2.4}(\mathrm{D}^{2n}\sin^4 x)_0 + \ldots$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.5.6\ldots 2n}(\mathrm{D}^{2n}\sin^{2n} x)_0].$$

Faisant donc dans la formule (2) (lemme 2) k successivement égal à 1.2.3... n, on obtient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T}_{2n} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^1}[2_0 . 2^{2n}] \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{2^3}[4_1 . 2^{2n} - 4_0 . 4^{2n}] \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{2^5}[6_2 . 2^{2n} - 6_1 . 4^{2n} + 6_0 . 6^{2n}] \\ &+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}} \\ &\times\left[\begin{matrix}(2n)_{n-1} . 2^{2n} - (2n)_{n-2} . 4^{2n}\ldots \\ \pm(2n)_0\,(2n)^{2n}\end{matrix}\right]. \end{aligned}\right.$$

On prouve comme ci-dessus qu'on a seulement

$$T_m = (D^m \cos x)_0 + (D^m \sin x \cos x)_0 + (D^m \sin^2 x \cos x)_0 + \ldots$$
$$+ (D^m \sin^m x \cos x)_0,$$

$$D^m (\sin^k x \cos x) = \frac{1}{k+1} D^{m+1} \sin^{k+1} x,$$

donc

$$T_m = \frac{1}{1} (D^{m+1} \sin x)_0 + \frac{1}{2} (D^{m+1} \sin^2 x)_0$$
$$+ \frac{1}{m+1} (D^{m+1} \sin^{m+1} x)_0.$$

Ayant égard aux formules (2) et (3), on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^n T_{2n} \\ & = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} [3_1 . 1^{2n+1} - 3_0 . 3^{2n+1}] \\ & + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} [5_2 . 1^{2n+1} - 5_1 . 3^{2n+1} + 5_0 . 5^{2n+1}] \\ & + \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n}} \left[\begin{array}{c} (2n+1)_n . 1^{2n+1} \\ -(2n+1)_{n-1} . 3^{2n+1} + \ldots \\ \pm (2n+1)_0 (2n+1)^{2n+1} \end{array} \right]. \end{aligned} \right.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{n+1} T_{2n-1} \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^1} [2_0 . 2^{2n}] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} [4_1 . 2^{2n} - 4_0 . 4^{2n}] \\ & + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^5} [6_2 . 2^{2n} - 6_1 . 4^{2n} + 6_0 . 6^{2n}] + \ldots \\ & + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} \left[\begin{array}{c} (2n)_{n-1} . 2^{2n} - (2n)_{n-2} . 4^{2n} + \ldots \\ \pm (2n)_0 . (2n)^{2n} \end{array} \right]. \end{aligned} \right.$$

En faisant dans cette dernière formule $n = 3$, on a

$$T_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [2^6] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} [4 . 2^6 - 4^6] + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^5} \left[\begin{array}{c} 15 . 2^6 \\ - 6 . 4^6 + 6^6 \end{array} \right]$$
$$= 16 - 120 + 120 = 16, \text{ comme ci-dessus.}$$

Formules récurrentes.

8.

$$(8)\quad m_0 T_m - m_2 T_{m-2} + m_4 T_{m-4} - m_6 T_{m-6} + \ldots = \sin\frac{m\pi}{2},$$

$$(9)\quad T_{m+1} = m_0 T_0 T_m + m_1 T_1 T_{m-1} + m_2 T_2 T_{m-2} + \ldots$$

à démontrer.

Nombres bernoulliens (Jacques Bernoulli).

9. B_p désignant un nombre bernoullien, on sait que l'on a

$$B_{2n} = T_{2n}, \quad \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} = T_{2n-1}.$$

Les formules (4), (5), (6), (7), (8), (9) s'appliquent donc aussi aux nombres bernoulliens (*voir* Lacroix, *Calcul différentiel*, tome III, p. 84 et 106; 1819).

THÉORÈME D'EULER SUR L'AIRE DU SECTEUR PARABOLIQUE

(voir tome XV, page 13).

$$r = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}, \quad r' = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi'},$$

$$\varphi' - \varphi = \theta, \quad \varphi > 0, \quad \varphi' > 0, \quad r' > r,$$

on a

$$p = \frac{4rr'\sin^2\frac{1}{2}\theta}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}.$$

$$S = \frac{1}{24}(2r + p)\sqrt{4rp - p^2}$$

égale aire du segment parabolique compris entre r et l'axe.

$$S_1 = \frac{1}{24}\left[(2r' + p)\sqrt{4r'p - p^2} \mp (2r + p)\sqrt{4rp - p^2}\right]$$

égale aire du segment compris entre r et r'.

$$4r - p = \frac{4r\left[\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right]^2}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}},$$

$$2r + p = 2r\,\frac{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'} + 2r'\sin^2\frac{1}{2}\theta}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}};$$

On a des expressions semblables pour $4r' - p$ et $2r' + p$.

$$\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}$$

est négatif, et

$$\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}$$

est positif. Donc

$$\sqrt{4r - p} = -\frac{2\sqrt{r}\left(\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right)}{\sqrt{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}},$$

$$\sqrt{4r' - p} = \frac{2\sqrt{r'}\left(\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}\right)}{\sqrt{r + r' - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}}.$$

Substituant ces valeurs dans S_1, on a

$$\frac{6S_1}{\sqrt{p}}=\frac{A+B}{C},$$

$$A=r'\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}+2r\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$\times\left(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}\right)\sqrt{r'},$$

$$B=r\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}+2r'\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$\times\left(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right)\sqrt{r},$$

$$C=\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$A+B=\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)$$
$$\times\left[(r+r')^2-(r+r')\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}-2rr'\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$=\left(r+r'+\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr}\right)\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)^2;$$

d'où

$$S_r=\frac{1}{6}\left(r+r_1+\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)\sqrt{p\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right.}.$$

Observation. On parvient au même résultat en supposant φ et φ' de signes opposés.

Soit s la longueur de la corde qui joint les extrémités des rayons vecteurs r et r'; on a

$$2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}=\pm\sqrt{(r+r')^2-s^2},$$

le signe supérieur lorsqu'on a $0<\theta<180$, et le signe

Le coefficient du terme en x sera

$$-\left[\begin{array}{l} p^2q^2(p^2+2pq)+p^2q^2(q^2+2pq) \\ +p^2(p^2+2pq(q^2+2pq)+q^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)\end{array}\right].$$

En le transformant, il se met sous la forme

$$-2pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq).$$

Le terme constant est égal au produit des racines. L'équation du quatrième degré sera donc

$$\begin{aligned} &x^4-2(p+q)^2x^3+[(p+q)^4+2pq(p^2+q^2+pq)]x^2 \\ &\quad -2pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq)x \\ &\quad +p^2q^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)=0. \end{aligned}$$

L'équation obtenue en égalant la dérivée à zéro est

$$\begin{aligned} &x^3-\frac{3}{2}(p+q)^2x^2+\left[\frac{(p+q)^4}{2}+pq(p^2+q^2+pq)\right]x \\ &\quad -\frac{pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq)}{2}=0. \end{aligned}$$

Je dis maintenant que les racines de cette équation sont rationnelles et de la forme

$$pq,\quad \frac{(p+q)^2}{2},\quad (p^2+q^2+pq).$$

Il est facile de le vérifier.

En effet, le coefficient $-\frac{3}{2}(p+q)^2$ est égal à la somme de ces trois racines prise en signe contraire. Le terme constant est égal à leur produit changé de signe.

De plus, le coefficient de x peut se transformer ainsi :

$$\begin{aligned} &\frac{(p+q)^4}{2}+pq(p^2+q^2+pq) \\ &=\frac{(p+q)^2}{2}(p^2+q^2+pq)+\frac{(p+q)^2}{2}(pq)+pq(p^2+q^2+pq), \end{aligned}$$

et sous cette forme on voit que c'est la somme des produits deux à deux des racines supposées.

SUR LES QUESTIONS 321 ET 322

(voir t. XV, p. 184),

PAR M. LOUIS CREMONA (DE PAVIE).

Question 321.

Soient a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{ième}$ de l'hexagone; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; α_r, β_r, γ_r les cosinus des angles du même côté avec les axes. On a, par les données du problème,

$$a_2 = a_1 + \alpha_1 l_1, \qquad b_2 = b_1 + \beta_1 l_1, \qquad c_2 = c_1 + \gamma_1 l_1.$$

$$a_3 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_4 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3,$$

$$a_5 = a_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3,$$

$$a_6 = a_1 + \alpha_3 l_3,$$

Par conséquent, l'équation du plan passant par les milieux des côtés (1, 2), (2, 3), (3, 4) sera

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2a_1 + \alpha_1 l_1 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + 2\alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \\ 2y & 2b_1 + \beta_1 l_1 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + 2\beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 \\ 2z & 2c_1 + \gamma_1 l_1 & 2c_2 + 2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 & 2c_1 + 2\gamma_1 l_1 + 2\gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en transformant ce déterminant par des théorèmes très-connus,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4(x - a_1) & \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 & \alpha_3 l_3 + \alpha_1 l_1 & \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \\ 4(y - b_1) & \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 & \beta_3 l_3 + \beta_1 l_1 & \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 \\ 4(z - c_1) & \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 & \gamma_3 l_3 + \gamma_1 l_1 & \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On prouve comme ci-dessus qu'on a seulement

$$T_m = (D^m \cos x)_0 + (D^m \sin x \cos x)_0 + (D^m \sin^2 x \cos x)_0 + \ldots + (D^m \sin^m x \cos x)_0,$$

$$D^m (\sin^k x \cos x) = \frac{1}{k+1} D^{m+1} \sin^{k+1} x,$$

donc

$$T_m = \frac{1}{1} (D^{m+1} \sin x)_0 + \frac{1}{2} (D^{m+1} \sin^2 x)_0 + \frac{1}{m+1} (D^{m+1} \sin^{m+1} x)_0.$$

Ayant égard aux formules (2) et (3), on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^n T_{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} [3_1 . 1^{2n+1} - 3_0 . 3^{2n+1}] \\ &+ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} [5_2 . 1^{2n+1} - 5_1 . 3^{2n+1} + 5_0 . 5^{2n+1}] \\ &+ \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n}} \left[\begin{array}{c} (2n+1)_n . 1^{2n+1} \\ - (2n+1)_{n-1} . 3^{2n+1} + \ldots \\ \pm (2n+1)_0 (2n+1)^{2n+1} \end{array} \right]. \end{aligned} \right.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{n+1} T_{0n-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^1} [2_0 . 2^{2n}] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} [4_1 . 2^{2n} - 4_0 . 4^{2n}] \\ &+ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^5} [6_2 . 2^{2n} - 6_1 . 4^{2n} + 6_0 . 6^{2n}] + \ldots \\ &+ \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} \left[\begin{array}{c} (2n)_{n-1} . 2^{2n} - (2n)_{n-2} . 4^{2n} + \ldots \\ \pm (2n)_0 . (2n)^{2n} \end{array} \right]. \end{aligned} \right.$$

En faisant dans cette dernière formule $n = 3$, on a

$$T_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [2^6] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} [4 . 2^6 - 4^6] + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^5} \left[\begin{array}{c} 15 . 2^6 \\ - 6 . 4^6 + 6^6 \end{array} \right]$$

$= 16 - 120 + 120 = 16$, comme ci-dessus.

Formules récurrentes.

8.

$$(8)\quad m_0 T_m - m_2 T_{m-2} + m_4 T_{m-4} - m_6 T_{m-6} + \ldots = \sin\frac{m\pi}{2},$$

$$(9)\quad T_{m+1} = m_0 T_0 T_m + m_1 T_1 T_{m-1} + m_2 T_2 T_{m-2} + \ldots$$

à démontrer.

Nombres bernoulliens (Jacques Bernoulli).

9. B_p désignant un nombre bernoullien, on sait que l'on a

$$B_{2n} = T_{2n}, \quad \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} = T_{2n-1}.$$

Les formules (4), (5), (6), (7), (8), (9) s'appliquent donc aussi aux nombres bernoulliens (*voir* Lacroix, *Calcul différentiel*, tome III, p. 84 et 106; 1819).

THÉORÈME D'EULER SUR L'AIRE DU SECTEUR PARABOLIQUE

(voir tome XV, page 18).

$$r = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}, \quad r' = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi'},$$

$$\varphi' - \varphi = \theta, \quad \varphi > 0, \quad \varphi' > 0, \quad r' > r,$$

on a

$$p = \frac{4rr'\sin^2\frac{1}{2}\theta}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}.$$

$$S = \frac{1}{24}(2r + p)\sqrt{4rp - p^2}$$

égale aire du segment parabolique compris entre r et l'axe.

$$S_1 = \frac{1}{24}\left[(2r' + p)\sqrt{4r'p - p^2} \mp (2r + p)\sqrt{4rp - p^2}\right]$$

égale aire du segment compris entre r et r'.

$$4r - p = \frac{4r\left[\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right]^2}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}},$$

$$2r + p = 2r\,\frac{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'} + 2r'\sin^2\frac{1}{2}\theta}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}};$$

On a des expressions semblables pour $4r' - p$ et $2r' + p$.

$$\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}$$

est négatif, et

$$\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}$$

est positif. Donc

$$\sqrt{4r - p} = -\frac{2\sqrt{r}\left(\sqrt{r} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right)}{\sqrt{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}},$$

$$\sqrt{4r' - p} = \frac{2\sqrt{r'}\left(\sqrt{r'} - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}\right)}{\sqrt{r + r' - \cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}}.$$

Substituant ces valeurs dans S_1, on a

$$\frac{6S_1}{\sqrt{p}}=\frac{A+B}{C},$$

$$A=r'\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}+2r\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$\times\left(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}\right)\sqrt{r'},$$

$$B=r\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}+2r'\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$\times\left(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right)\sqrt{r},$$

$$C=\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$A+B=\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)$$
$$\times\left[(r+r')^2-(r+r')\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}-2rr'\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$=\left(r+r'+\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr}\right)\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)^2;$$

d'où

$$S_r=\frac{1}{6}\left(r+r_1+\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)\sqrt{p\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right.}.$$

Observation. On parvient au même résultat en supposant φ et φ' de signes opposés.

Soit s la longueur de la corde qui joint les extrémités des rayons vecteurs r et r'; on a

$$2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}=\pm\sqrt{(r+r')^2-s^2},$$

le signe supérieur lorsqu'on a $0<\theta<180$, et le signe

Le coefficient du terme en x sera

$$-\left[\begin{array}{l} p^2q^2(p^2+2pq)+p^2q^2(q^2+2pq) \\ +p^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)+q^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)\end{array}\right].$$

En le transformant, il se met sous la forme

$$-2pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq).$$

Le terme constant est égal au produit des racines. L'équation du quatrième degré sera donc

$$\begin{aligned} x^4 &- 2(p+q)^2x^3+[(p+q)^4+2pq(p^2+q^2+pq)]x^2 \\ &-2pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq)x \\ &+p^2q^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)=0. \end{aligned}$$

L'équation obtenue en égalant la dérivée à zéro est

$$\begin{aligned} x^3 &- \frac{3}{2}(p+q)^2x^2+\left[\frac{(p+q)^4}{2}+pq(p^2+q^2+pq)\right]x \\ &-\frac{pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq)}{2}=0. \end{aligned}$$

Je dis maintenant que les racines de cette équation sont rationnelles et de la forme

$$pq,\quad \frac{(p+q)^2}{2},\quad (p^2+q^2+pq).$$

Il est facile de le vérifier.

En effet, le coefficient $-\frac{3}{2}(p+q)^2$ est égal à la somme de ces trois racines prise en signe contraire. Le terme constant est égal à leur produit changé de signe.

De plus, le coefficient de x peut se transformer ainsi :

$$\begin{aligned} &\frac{(p+q)^4}{2}+pq(p^2+q^2+pq) \\ =&\frac{(p+q)^2}{2}(p^2+q^2+pq)+\frac{(p+q)^2}{2}(pq)+pq(p^2+q^2+pq), \end{aligned}$$

et sous cette forme on voit que c'est la somme des produits deux à deux des racines supposées.

SUR LES QUESTIONS 321 ET 322

(voir t. XV, p. 154),

PAR M. LOUIS CREMONA (DE PAVIE).

Question 321.

Soient a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{ième}$ de l'hexagone; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; α_r, β_r, γ_r les cosinus des angles du même côté avec les axes. On a, par les données du problème,

$$\begin{array}{lll}
a_2 = a_1 + \alpha_1 l_1, & b_2 = b_1 + \beta_1 l_1, & c_2 = c_1 + \gamma_1 l_1. \\
a_3 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_4 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, & & \\
a_5 = a_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, & & \\
a_6 = a_1 + \alpha_3 l_3, & &
\end{array}$$

Par conséquent, l'équation du plan passant par les milieux des côtés (1, 2), (2, 3), (3, 4) sera

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
2x & 2a_1 + \alpha_1 l_1 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + 2\alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \\
2y & 2b_1 + \beta_1 l_1 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + 2\beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 \\
2z & 2c_1 + \gamma_1 l_1 & 2c_2 + 2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 & 2c_1 + 2\gamma_1 l_1 + 2\gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3
\end{vmatrix} = 0,$$

ou, en transformant ce déterminant par des théorèmes très-connus,

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 \\
4(x - a_1) & \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 & \alpha_3 l_3 + \alpha_1 l_1 & \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \\
4(y - b_1) & \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 & \beta_3 l_3 + \beta_1 l_1 & \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 \\
4(z - c_1) & \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 & \gamma_3 l_3 + \gamma_1 l_1 & \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2
\end{vmatrix} = 0.$$

En observant de quelle façon cette équation renferme les éléments qui composent les coordonnées des sommets de l'hexagone, on voit que la même équation représente aussi le plan passant par les milieux des côtés (4, 5), (5, 6), (6, 1). Donc, etc.

Question 322.

Soient $2n$ le nombre des côtés du polygone; a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{ième}$; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; α_r, β_r, γ_r, les cosinus des angles de ce côté avec les axes. En supposant que r soit un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$, on a

$$a_r = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_{r-1} l_{r-1},$$

$$a_{n+r} = a_1 + \alpha_r l_r + \alpha_{r+1} l_{r+1} + \ldots + \alpha_n l_n,$$

donc

$$a_r + a_{n+r} = 2a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n,$$

c'est-à-dire $a_r + a_{n+r}$ est indépendant de r; analoguement pour $b_r + b_{n+r}$ et $c_r + c_{n+r}$.

Je considère le point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{1}{2}(a_r + a_{n+r}), \quad y = \frac{1}{2}(b_r + b_{n+r}), \quad z = \frac{1}{2}(c_r + c_{n+r});$$

ces coordonnées satisfont évidemment aux équations de la droite $(r, n+r)$, qui sont

$$\frac{x - a_r}{a_r - a_{n+r}} = \frac{y - b_r}{b_r - b_{n+r}} = \frac{z - c_r}{c_r - c_{n+r}}$$

et satisfont aussi aux équations de la droite qui joint les milieux des côtés $(r, r+1)$, $(n+r, n+r+1)$, savoir

$$\frac{2x - a_r - a_{r+1}}{a_r + a_{r+1} - a_{n+r} - a_{n+r+1}} = \frac{2y - b_r - b_{r+1}}{b_r + b_{r+1} - b_{n+r} - b_{n+r+1}}$$

$$= \frac{2z - c_r - c_{r+1}}{c_r + c_{r+1} - c_{n+r} - c_{n+r+1}};$$

donc le point nommé est commun à toutes les droites qui joignent les sommets opposés et à celles qui joignent les milieux des côtés opposés, et le même point est le milieu de chacune de ces droites.

SOLUTION DE LA QUESTION 336

(voir t. XV, p. 290);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Un triangle rectangle ABC est équivalent au rectangle des deux segments $B\alpha$ et $C\alpha$ faits sur l'hypoténuse par le point de contact α du cercle inscrit.

Soient r le rayon du cercle inscrit et S la surface du triangle. On a, β et γ étant les deux autres points de contact,

$$r = A\gamma = A\beta,$$

$$S = \frac{1}{2} AB.AC.$$

Remplaçons AB et AC par leur valeur en faisant attention que

$$B\gamma = B\alpha, \quad C\alpha = C\beta,$$

il vient

$$S = \frac{1}{2}(B\alpha + r)(C\alpha + r)$$

$$= \frac{1}{2} B\alpha.C\alpha + \frac{1}{2}[(B\alpha + C\alpha)r + r^2)].$$

Mais

$$\frac{1}{2}[(B\alpha + C\alpha)r + r^2] = \frac{1}{2}S;$$

donc

$$B\alpha \times C\alpha = S.$$

Note. MM. A. Raimbeaux, Dunod, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie), Pâque, professeur à Liége, Jozon, élève du lycée Louis-le-Grand, Constant (Jules), Varlet, élève du collége Rollin (classe de M. Suchet), et Aubert, professeur, ont résolu la question de la même manière.

Observation. MM. Murent (de Clermont) et Moreau (du lycée Saint-Louis) font usage de la formule générale

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 344

(voir t. XV, p. 383);

PAR MM. DESJACQUES.

Un point fixe O est donné dans un angle plan de sommet A; par O on mène une transversale rencontrant les côtés de l'angle en B et C; S et S_1 étant les aires des triangles OBA, OCA, la somme $\frac{1}{S} + \frac{1}{S_1}$ est constante, de quelque manière qu'on mène la transversale.

Soient B′ C′ une autre transversale passant par le point O; S', S_1' les aires des triangles OB′A, OC′A. Les triangles BAC, B′AC′ donnent le rapport

$$\frac{BAC}{B'AC'} = \frac{AB \times AC}{AB' \times AC'};$$

et les triangles AOB, AOB′, AOC, AOC′ donnent

$$\frac{AOB}{AOB'} = \frac{AB}{AB'}, \quad \frac{AOC}{AOC'} = \frac{AC}{AC'}.$$

En remplaçant BAC, B′AC′ par $S + S_1$, $S' + S_1'$, et

AOB, AOB′, AOC, AOC′ par S, S′, S_1, S'_1, et en multipliant membre à membre les deux derniers rapports, on a

$$\frac{SS_1}{S'S'_1} = \frac{AB \times AC}{AB' \times AC'} = \frac{BAC}{B'AC'},$$

d'où

$$\frac{S + S_1}{S' + S'_1} = \frac{SS_1}{S'S'_1}.$$

On tire de là

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{S'} + \frac{1}{S'_1}.$$

Si l'on suppose le point O pris hors de l'angle, on a aussi $\frac{1}{S} - \frac{1}{S_1}$ égal à une quantité constante.

Note. MM. Richard P. Oxamendy (de Cuba) Aubert, professeur, Poudra, un anonyme et M. A. Raimbeaux ont résolu la question de la même manière.

SOLUTION DE LA QUESTION 339

(voir t. XV, p. 291);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J., ET UN ANONYME.

Toutes les circonférences ayant leurs centres sur une même droite et coupant à angle droit une circonférence donnée ont même axe radical, et toutes ces circonférences prises deux à deux et la circonférence donnée ont même centre radical. (MANNHEIM.)

Soient m le centre de la circonférence donnée, pp la droite donnée; du point m abaissons une perpendiculaire mh sur pp: un point quelconque m_1, pris sur cette perpendiculaire, sera d'égale puissance par rapport à deux

SOLUTION DE LA MÊME QUESTION 339;

PAR M. AUBERT.
Professeur.

Soient O le centre de la circonférence donnée que je prends pour origine d'axes rectangulaires, r son rayon, C, C', C'',... les centres des circonférences qui coupent à angle droit la circonférence O, et R, R', R'',... leurs rayons.

α, β sont les coordonnées du point C,
α', β' » C',
α'', β'' » C'',
....

L'équation de l'axe radical des circonférences C et C' est

$$(2y - \beta - \beta')(\beta' - \beta) + (2x - \alpha - \alpha')(\alpha' - \alpha) - R^2 + R'^2 = 0;$$

elle devient, par un calcul très-facile, eu égard aux relations

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = R'^2,$$

qui expriment que les circonférences C, C' coupent à angle droit la circonférence O,

$$(\beta' - \beta)y + (\alpha' - \alpha)x = 0,$$

équation d'une droite qui passe par le centre O de la circonférence donnée.

De même, l'équation de l'axe radical des cercles C, C'' sera

$$(\beta'' - \beta)y + (\alpha'' - \alpha)x = 0,$$

équation identique avec la précédente, car les points C, C′, C″,... étant en ligne droite, on a

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta'' - \beta}{\alpha'' - \alpha}.$$

Donc il n'y a pour tous les cercles C, C′, C″,... pris deux à deux qu'un seul axe radical.

Maintenant considérons ensemble les trois circonférences O, C, C′. L'axe radical de O et C est représenté par l'équation

$$(2y - \beta)\beta + (2x - \alpha)\alpha + R^2 - r^2 = 0,$$

qui, toutes réductions faites, devient

(1) $$\beta y + \alpha x - r^2 = 0.$$

L'équation de l'axe radical des circonférences O et C′ sera

(2) $$\beta' y + \alpha' x - r^2 = 0.$$

Les coordonnées du centre radical des cercles O, C, C′ sont les valeurs de x et y qui conviennent aux équations (1) et (2), valeurs qui vérifient l'équation

$$(\beta' - \beta) y + (\alpha' - \alpha) x = 0,$$

qui n'est autre que la différence des équations (1) et (2) : ce qu'on sait d'ailleurs.

Le centre radical des circonférences O, C, C″ serait donné par les équations

$$\beta y + \alpha x - r^2 = 0, \quad \beta'' y + \alpha'' x - \alpha^2 = 0,$$

qui, en vertu de la relation

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta'' - \beta}{\alpha'' - \alpha},$$

sont identiques avec le système des équations (1) et (2).

Le coefficient du terme en x sera

$$-\left[\begin{array}{l} p^2q^2(p^2+2pq)+p^2q^2(q^2+2pq) \\ +p^2(p^2+2pq(q^2+2pq)+q^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)\end{array}\right].$$

En le transformant, il se met sous la forme

$$-2pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq).$$

Le terme constant est égal au produit des racines. L'équation du quatrième degré sera donc

$$\begin{array}{l} x^4-2(p+q)^2x^3+[(p+q)^4+2pq(p^2+q^2+pq)]x^2 \\ -2pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq)x \\ +p^2q^2(p^2+2pq)(q^2+2pq)=0. \end{array}$$

L'équation obtenue en égalant la dérivée à zéro est

$$x^3-\frac{3}{2}(p+q)^2x^2+\left[\frac{(p+q)^4}{2}+pq(p^2+q^2+pq)\right]x$$

$$-\frac{pq(p+q)^2(p^2+q^2+pq)}{2}=0.$$

Je dis maintenant que les racines de cette équation sont rationnelles et de la forme

$$pq,\quad \frac{(p+q)^2}{2},\quad (p^2+q^2+pq).$$

Il est facile de le vérifier.

En effet, le coefficient $-\frac{3}{2}(p+q)^2$ est égal à la somme de ces trois racines prise en signe contraire. Le terme constant est égal à leur produit changé de signe.

De plus, le coefficient de x peut se transformer ainsi :

$$\frac{(p+q)^4}{2}+pq(p^2+q^2+pq)$$

$$=\frac{(p+q)^2}{2}(p^2+q^2+pq)+\frac{(p+q)^2}{2}(pq)+pq(p^2+q^2+pq),$$

et sous cette forme on voit que c'est la somme des produits deux à deux des racines supposées.

SUR LES QUESTIONS 321 ET 322

(voir t. XV, p. 184);

PAR M. LOUIS CREMONA (DE PAVIE).

Question 321.

Soient a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{ième}$ de l'hexagone; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; α_r, β_r, γ_r les cosinus des angles du même côté avec les axes. On a, par les données du problème,

$$\begin{array}{lll} a_2 = a_1 + \alpha_1 l_1, & b_2 = b_1 + \beta_1 l_1, & c_2 = c_1 + \gamma_1 l_1. \\ a_3 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_4 = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, & & \\ a_5 = a_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3, & & \\ a_6 = a_1 + \alpha_3 l_3, & & \end{array}$$

Par conséquent, l'équation du plan passant par les milieux des côtés (1, 2), (2, 3), (3, 4) sera

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2a_1 + \alpha_1 l_1 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 & 2a_1 + 2\alpha_1 l_1 + 2\alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \\ 2y & 2b_1 + \beta_1 l_1 & 2rb_1 + 2\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 & 2b_1 + 2\beta_1 l_1 + 2\beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 \\ 2z & 2c_1 + \gamma_1 l_1 & 2c_2 + 2\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 & 2c_1 + 2\gamma_1 l_1 + 2\gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en transformant ce déterminant par des théorèmes très-connus,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4(x - a_1) & \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 & \alpha_3 l_3 + \alpha_1 l_1 & \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 \\ 4(y - b_1) & \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 & \beta_3 l_3 + \beta_1 l_1 & \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 \\ 4(z - c_1) & \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 & \gamma_3 l_3 + \gamma_1 l_1 & \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En observant de quelle façon cette équation renferme les éléments qui composent les coordonnées des sommets de l'hexagone, on voit que la même équation représente aussi le plan passant par les milieux des côtés $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 1)$. Donc, etc.

Question 322.

Soient $2n$ le nombre des côtés du polygone; a_r, b_r, c_r les coordonnées du sommet $r^{ième}$; l_r la longueur du côté $(r, r+1)$; α_r, β_r, γ_r, les cosinus des angles de ce côté avec les axes. En supposant que r soit un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$, on a

$$a_r = a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_{r-1} l_{r-1},$$

$$a_{n+r} = a_1 + \alpha_r l_r + \alpha_{r+1} l_{r+1} + \ldots + \alpha_n l_n,$$

donc

$$a_r + a_{n+r} = 2a_1 + \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n,$$

c'est-à-dire $a_r + a_{n+r}$ est indépendant de r; analoguement pour $b_r + b_{n+r}$ et $c_r + c_{n+r}$.

Je considère le point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{1}{2}(a_r + a_{n+r}), \quad y = \frac{1}{2}(b_r + b_{n+r}), \quad z = \frac{1}{2}(c_r + c_{n+r});$$

ces coordonnées satisfont évidemment aux équations de la droite $(r, n+r)$, qui sont

$$\frac{x - a_r}{a_r - a_{n+r}} = \frac{y - b_r}{b_r - b_{n+r}} = \frac{z - c_r}{c_r - c_{n+r}}$$

et satisfont aussi aux équations de la droite qui joint les milieux des côtés $(r, r+1)$, $(n+r, n+r+1)$, savoir

$$\frac{2x - a_r - a_{r+1}}{a_r + a_{r+1} - a_{n+r} - a_{n+r+1}} = \frac{2y - b_r - b_{r+1}}{b_r + b_{r+1} - b_{n+r} - b_{n+r+1}}$$
$$= \frac{2z - c_r - c_{r+1}}{c_r + c_{r+1} - c_{n+r} - c_{n+r+1}};$$

donc le point nommé est commun à toutes les droites qui joignent les sommets opposés et à celles qui joignent les milieux des côtés opposés, et le même point est le milieu de chacune de ces droites.

SOLUTION DE LA QUESTION 336

(voir t. XV, p. 290);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Un triangle rectangle ABC est équivalent au rectangle des deux segments $B\alpha$ et $C\alpha$ faits sur l'hypoténuse par le point de contact α du cercle inscrit.

Soient r le rayon du cercle inscrit et S la surface du triangle. On a, β et γ étant les deux autres points de contact,

$$r = A\gamma = A\beta,$$

$$S = \frac{1}{2} AB.AC.$$

Remplaçons AB et AC par leur valeur en faisant attention que

$$B\gamma = B\alpha, \quad C\alpha = C\beta,$$

il vient

$$S = \frac{1}{2}(B\alpha + r)(C\alpha + r)$$

$$= \frac{1}{2} B\alpha . C\alpha + \frac{1}{2}[(B\alpha + C\alpha) r + r^2)].$$

Mais

$$\frac{1}{2}[(B\alpha + C\alpha) r + r^2] = \frac{1}{2} S;$$

donc

$$B\alpha \times C\alpha = S.$$

ment exact pour prêter à un auteur, qui paraît d'ailleurs raisonnable, l'affirmation que des approximations du second ordre ou du quatrième sont une seule et même chose. C'est de la même manière encore que je donne à la page 143 un théorème relatif à la construction de deux circonférences comprenant entre elles le périmètre d'une ellipse donnée, théorème analogue à celui de Bernoulli, mais fournissant une approximation moins rapide que ce dernier. Néanmoins j'aurais volontiers supprimé dans mon ouvrage les deux pages qui contiennent le développement du théorème précité, si le triangle auxiliaire que j'y emploie n'avait présenté une liaison géométrique remarquable avec le triangle sphérique vrai, et si, en particulier, une certaine combinaison des données des trois triangles rectilignes que l'on peut employer n'eût reproduit le triangle même de Legendre.

Enfin j'ajouterai que M. Rouché doit publier prochainement un Traité nouveau de Trigonométrie qui se recommande, à ce que j'ai appris, et par une rare valeur intrinsèque et par une démonstration nouvelle, communiquée à l'auteur par M. Bonnet, du théorème de Legendre dont il vient d'être question.

26 septembre 1856.

NOTE SUR LA DIVISION DU CERCLE

Par la règle et le compas ;

PAR M. ALLEGRET.

L'illustre Gauss a indiqué dans ses *Disquisitiones Arithmeticæ*, VIIe section, quels sont les seuls cas où l'on peut diviser géométriquement le cercle en parties

égales. On peut résumer la belle découverte de Gauss par ce théorème dont l'énoncé me paraît fort simple :

Pour que la division de la circonférence en N *parties égales puisse être effectuée géométriquement par la règle et le compas, il faut et il suffit que le nombre des entiers inférieurs à* N *et premiers avec lui soit une puissance de* 2.

On peut rapprocher cet énoncé du suivant, dû à Gauss, et traduit aussi par Wantzel (*Journal de Mathématiques*, tome II, p. 369) :

La division de la circonférence en N *parties ne peut être effectuée avec la règle et le compas que si les facteurs premiers de* N *différents de* 2 *sont de la forme* $2^n + 1$, *et s'ils entrent seulement à la première puissance dans ce nombre.*

SOLUTION DE LA QUESTION 355

(voir t. XV, p. 164);

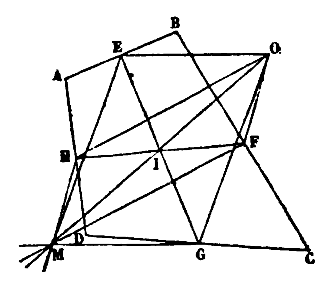
PAR MM. A. ROUSSIN ET R. GIBOL,
Élèves de Sainte-Barbe, classe spéciale.

Etant donnés un quadrilatère ABCD et un point O dans son plan, on joint ce point aux milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère. Par chaque point milieu, on mène une parallèle à la droite joignant le point O au milieu du côté opposé. Prouver que les six parallèles concourent au même point.

Rappelons d'abord que dans un quadrilatère les droites joignant les milieux des côtés opposés et des diagonales se coupent au même point en deux parties égales.

Soient E, F, G, H les milieux des côtés AB, BC, CD,

DE, etc. Joignons OE, OF, OG, OH ; par E et G menons les parallèles EM et GM à OG et à OE; elles se coupent



en M, et OEMG est un parallélogramme. Le problème revient à prouver que si l'on joint MF et MH, ces droites sont respectivement parallèles à OH et OF.

Or dans OEMG les deux diagonales EG et OM se coupent en leurs milieux au point I. Ce point est aussi le milieu de HF. Nous en déduisons que OHMF est un parallélogramme et que MH et MF sont parallèles à OE et OH.

On démontrerait absolument de même que les deux autres parallèles menées par chaque point milieu des deux diagonales à la droite joignant le point O à l'autre, concourent au même point M.

Note du Rédacteur. Les deux faisceaux de six droites chacun qui partent de O et de M sont homographiques, car les points milieux sont des points correspondant harmoniquement à des points situés à l'infini. Projetant la figure coniquement, ces six points à l'infini sont en ligne droite L et en involution. Les trois parallélogrammes deviennent des quadrilatères où les côtés opposés se rencontrent en des points situés sur la même droite L. Tirant donc arbitrairement une droite L dans le plan du quadrilatère ABCD, les quatre côtés et les deux diagonales prolongées coupent la droite L en six points; prenant les

harmoniques de ces six points, on obtient sur les quatre côtés et les deux diagonales six autres points. Ce qui donne lieu à un théorème général de géométrie segmentaire. Les parallélogrammes deviennent des quadrilatères ayant en commun la diagonale OM; dans chacun, les côtés opposés se coupent en un point situé sur la droite L.

QUESTIONS.

356. 1°. Discuter la courbe qui a pour équation

(1) $$y = \sin[(2n+1) \operatorname{arc} \sin x] + 1.$$

2°. Démontrer que si $\varphi(x)$ est une fonction impaire (*) qui n'a pas plus de $2n - 1$ racines comprises entre $+1$ et -1, la courbe représentée par l'équation

(2) $$y = \varphi(x)$$

rencontre la courbe (1) au moins en un point dont l'abscisse est comprise entre $+1$ et -1.

3°. Déduire de ce qui précède la démonstration du théorème de M. Tchebichef (question 347, t. XV, p. 387).

(PROUHET.)

357. Etant donnés deux coniques homofocales et un point quelconque M entre les deux courbes; si l'on mène MT, MT′ tangentes à la courbe intérieure en T et en T′ et rencontrant la courbe extérieure en A et B, en C et D, on aura

$$\frac{1}{\mathrm{MA}} + \frac{1}{\mathrm{MB}} = \frac{1}{\mathrm{MC}} + \frac{1}{\mathrm{MD}}.$$

(*) On dit qu'une fonction $\varphi(x)$ est impaire lorsqu'on a

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

Si la courbe intérieure devient la droite terminée par les deux foyers, on retombe sur la question 348.

(MICHAEL ROBERTS.)

358. Etant données deux coniques ayant pour foyers communs les points F et F′, on mène arbitrairement par l'un de ces foyers F′ une droite rencontrant chaque conique en deux points; par chacun de ces quatre points on mène une tangente à la conique sur laquelle est ce point; 1° ces quatre droites sont tangentes à une parabole ayant pour foyer le second foyer F et pour directrice la droite menée arbitrairement par F′; 2° cette parabole est tangente à l'axe des coniques qui contient les foyers imaginaires; 3° une tangente commune à l'une des coniques et à la parabole est vue du foyer sous un angle droit.

(FAURE.)

359. Une surface de révolution étant engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe principal, tout plan mené par un foyer O de la conique coupe la surface suivant une conique qui a le même point O pour foyer.

360. A, B, C, D, E étant cinq points situés sur cette surface de révolution, on a la relation

$$\begin{aligned}OA.BC.DE + OB.CD.EA + OC.DE.AB \\ + OD.EA.BC + OE.AB.CD = 0.\end{aligned}$$

(MÖBIUS.)

361. On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B, on mène un plan *quelconque* déterminant un tétraèdre T de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T.

On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

(FAURE.)

362. L'équation générale du cinquième degré

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

peut toujours se résoudre algébriquement lorsqu'on a entre les coefficients les relations

$$\frac{d^2 - ce}{b^2 - ac} = \frac{e^2 - df}{c^2 - bd} = \frac{de - cf}{bc - ad}.$$

(FAURE.)

NOTE

Sur la discussion des équations du deuxième degré à deux variables par le moyen des équations de leurs axes trouvées à priori;

PAR M. GUILLAUMET,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

La discussion de l'équation générale du second degré à deux variables présente une complication de cas particuliers assez nombreux, qui exigent pour être traités des méthodes différentes, et nécessitent souvent des calculs longs à exécuter. L'idée de trouver à priori les axes de la courbe et leurs longueurs, s'il s'agit d'une courbe de l'un des deux premiers genres, serait, selon nous, assez naturelle et permettrait d'achever promptement la discussion sans qu'il pût naître aucune espèce de cas particuliers.

Cette méthode, employée dans toute sa généralité, ne fournirait pas toujours une simplification dans les cal-

culs; mais si l'on y joint les premiers résultats donnés immédiatement par la résolution de l'équation générale par rapport à y, elle amène à la connaissance définitive de la courbe plus rapidement que ne le ferait la méthode ordinaire.

L'application de cette méthode se base essentiellement sur la connaissance des axes d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires. Nous n'avons considéré que ce seul cas, qui, du reste, se présente le plus ordinairement. Nous avouerons même que, dans le cas des axes obliques, la simplification n'existerait plus, l'équation d'un axe se trouvant alors compliquée de lignes trigonométriques.

Pour trouver les axes de la courbe représentée par l'équation générale

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

on cherche à déterminer les coefficients a et b d'une droite

$$y = ax + b,$$

en exprimant que si l'on fait une transformation de coordonnées en prenant cette droite pour axe des abscisses, et pour axe des ordonnées une perpendiculaire quelconque à cette même droite, les termes du premier degré en y disparaissent de l'équation de la courbe.

Rien ne distinguant les deux axes nouveaux l'un de l'autre, on devra trouver deux solutions, et les deux valeurs du coefficient angulaire a devront être inverses.

En effet, posons les formules de transformation

$$x = x_1 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = y_1 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$$

et remarquons que la propriété indiquée devant avoir lieu quelle que soit la nouvelle origine pourvu que x et y soient

liés par la relation

$$y_1 = ax_1 + b,$$

nous pouvons faire $x_1 = 0$.

De plus, l'angle α a pour tangente trigonométrique a, ce qui donne pour nos formules de transformation

$$x = \frac{x'}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{ay'}{\sqrt{a^2+1}},$$

$$y = b + \frac{ax'}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{y'}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Reportant ces valeurs de x et y dans l'équation (1) et supprimant les accents, on a à égaler à zéro le coefficient du terme du premier degré en y, c'est-à-dire l'expression

$$\frac{2Aax}{a^2+1} + \frac{2Ab}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{Bx}{a^2+1} - \frac{Ba^2x}{a^2+1} - \frac{Bba}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{2Cax}{a^2+1}$$
$$+ \frac{D}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{Ea}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Mais ce coefficient devant être nul quel que soit x, on en déduira les deux équations

$$\frac{2Aa + B - Ba^2 - 2Ca}{a^2+1} = 0,$$

$$\frac{2Ab - Bba + D - Ea}{\sqrt{a^2+1}} = 0,$$

ou

(2) $$a^2 - \frac{2(A-C)}{B} - 1 = 0,$$

(3) $$(2A - Ba)b = Ea - D,$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}, \\ a_2 = \dfrac{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{D - Ea_1}{Ba_1 - 2A}, \\ b_2 = \dfrac{D - Ea_2}{Ba_2 - 2A}. \end{cases}$$

Les équations des axes de la courbe considérée seront donc

$$y = \frac{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}x + \frac{D - \frac{E}{B}\left[A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}\right]}{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2} - 2A},$$

$$y = \frac{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}x + \frac{D - \frac{E}{B}\left[A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}\right]}{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2} - 2A},$$

équations faciles à se rappeler, et qui, de plus, seront simples à construire numériquement, d'autant mieux que dans le terme tout connu, le coefficient déjà calculé se représente deux fois.

Nous ferons remarquer en passant que, bien qu'on trouve dans le cas de la parabole deux valeurs pour a et qu'il semble par conséquent y avoir deux axes, la méthode n'est cependant pas en défaut, car si l'on rem-

place B^2 par $4AC$, on a

$$a = \frac{2A}{B},$$

$$a = \frac{-2C}{B}.$$

Mais, reportant ces valeurs de a dans les valeurs de b, on a, pour celles de ces dernières qui correspondent à

$$a = -\frac{2C}{B},$$

une valeur finie, et, pour celle qui correspond à

$$a = \frac{2A}{B},$$

une valeur infinie qui indique bien l'impossibilité et non le parallélisme avec l'axe primitif des ordonnées, puisque les nouveaux axes sont perpendiculaires entre eux.

Cela posé, voyons d'abord la manière générale de construire la courbe au moyen de ses axes. Après quoi nous montrerons comment, si l'application de la méthode présente de trop grandes difficultés de calcul, on peut la simplifier en prenant un ou deux points de la courbe, points déterminés au moyen du diamètre dont l'équation est

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}$$

et par la résolution de l'équation

$$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF = 0,$$

ou par la résolution des équations qui résultent de la substitution dans l'équation (1) des valeurs $x = 0$ ou $y = 0$.

1°. Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, on

trouvera l'intersection des deux axes avec la courbe, ce qui donnera les quatre sommets si c'est une ellipse, ou les deux sommets et la longueur de l'axe imaginaire si c'est une hyperbole, et déterminera la courbe dans l'un ou l'autre cas.

2°. Si la courbe est une parabole, l'intersection de l'axe avec la courbe donne le sommet. On y joindra un point obtenu par l'une des méthodes que nous venons d'indiquer, et la courbe sera encore déterminée.

Nous n'engagerons pas ordinairement à appliquer cette méthode générale, sauf dans le cas de la parabole où l'équation de l'axe devient très-simple :

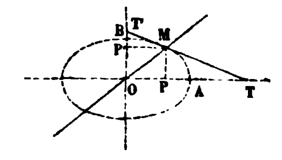
$$y = -\frac{2C}{B}x + \frac{D + \frac{2CE}{B}}{-2C - 2A}.$$

Mais nous allons montrer comment on peut la simplifier dans les deux premiers cas.

1°. *Ellipse.* On prendra les deux points de la courbe situés sur le diamètre dont l'équation est

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}.$$

A ces points on connaît la tangente qui est parallèle à à l'axe primitif des ordonnées. Cela donnera en même



temps le centre, et il suffit de construire a_1 et a_2 pour avoir les directions des axes.

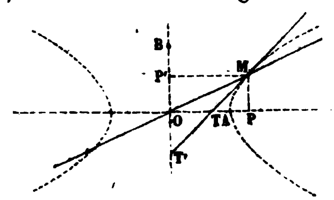
On sait alors que OA est une moyenne proportionnelle entre OP et OT et que OB est une moyenne proportion-

nelle entre OP′ et OT′, ce qui donne les quatre sommets.

2°. *Hyperbole.* Nous distinguerons deux cas.

I. Le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$ coupe la courbe.

On prendra, comme tout à l'heure, les deux points d'intersection, le centre et la tangente en l'un des deux



points, tangente parallèle à l'axe des Y. On aura les sommets et les extrémités de l'axe imaginaire par les relations

$$OA = \sqrt{OP \times OT}$$

et

$$OB\sqrt{-1} = \sqrt{OP' \times OT'}.$$

La direction de la tangente montrera lequel des deux axes est l'axe réel.

II. Le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$ est imaginaire.

On le construit; on construit l'un des deux axes; le centre est son intersection avec le diamètre. Le deuxième axe en résulte donc. On construira ensuite les directions des deux asymptotes et on trouvera un point quelconque de la courbe en faisant dans l'équation (1) $x = 0$ ou $y = 0$. On trouvera la tangente en ce point en y menant la droite dont la partie comprise entre les deux asymptotes aura ce même point pour milieu. Et on achèvera comme dans le cas précédent.

Dans le cas de la parabole, la méthode générale sera toujours simple et applicable.

La méthode est en défaut dans un seul cas : c'est celui où $B = o$. Mais on sait alors que les axes de la courbe sont parallèles aux axes primitifs. Si donc la courbe a un centre, on le trouvera en égalant à zéro les deux dérivées du premier membre de l'équation (1), et on appliquera, après avoir construit les axes en ce point, la méthode simplifiée.

Si la courbe est une parabole, la méthode ne s'appliquera plus du tout. Mais alors, comme l'un des carrés disparaît, la résolution par rapport aux deux variables donnera deux points sur une droite perpendiculaire à l'axe, par conséquent l'axe lui-même, et un point avec sa tangente, ce qui déterminera la courbe.

Nous sommes loin d'avoir énuméré tous les cas qui peuvent se présenter et même d'avoir discuté à fond ceux que nous avons signalés. Mais notre but était seulement de faire voir que la recherche des axes de figure des courbes du deuxième degré, faite à priori au moyen de la formule que nous avons indiquée, formule bien connue du reste, peut être utile pour la construction graphique de cette courbe, et même, à notre avis, apporter, dans un grand nombre de cas, une simplification de calculs assez sensible.

NOTE

Sur la théorie des racines égales et sur la question 332 (*)

(voir page 26) ;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

1. On doit à Lagrange le procédé indiqué dans tous les

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. III, p. 51, 1844 ; ROGER.

Traités d'Algèbre pour ramener la résolution d'une équation qui a des racines égales à celle de plusieurs autres équations de degrés moindres, dans lesquelles chaque racine n'entre qu'une seule fois. M. Ostrogradski a énoncé dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (19 mai 1856) deux propositions remarquables qui conduisent à deux solutions nouvelles et élégantes du même problème.

Nous nous proposons, dans cette Note, de démontrer et d'appliquer ces deux théorèmes, et de rectifier l'énoncé de la question 332.

2. **Théorème I.** *Soient* X, P, Q_1, R_1 *un polynôme entier de la variable* x; *le plus grand commun diviseur à ce polynôme et à sa dérivée* X'; *et les quotients*

$$\frac{X}{P},\quad \frac{X'}{P}.$$

Concevons le premier membre de l'équation

$$X = 0$$

décomposé en facteurs correspondants à ses racines, et désignons par q_1, q_2, q_3, q_4 les produits des facteurs de chaque degré de multiplicité pris chacun une fois; nous aurons successivement

$$X = q_1 q_2^2 q_3^3 q_4^4,$$

$$X' = X\left(\frac{q'_1}{q_1} + 2\frac{q'_2}{q_2} + 3\frac{q'_3}{q_3} + 4\frac{q'_4}{q_4}\right),$$

$$P = q^2 q_3^2 q_4^3,$$

$$Q_1 = q_1 q_2 q_3 q_4,$$

$$Q'_1 = Q_1\left(\frac{q'_1}{q_1} + \frac{q'_2}{q_2} + \frac{q'_3}{q_3} + \frac{q'_4}{q_4}\right),$$

$$R_1 = Q_1\left(\frac{q'_1}{q_1} + 2\frac{q'_2}{q_2} + 3\frac{q'_2}{q_3} + 4\frac{q'_4}{q_4}\right),$$

$$R_1 - Q'_1 = Q_1\left(\frac{q'_2}{q_2} + 2\frac{q'_3}{q_3} + 3\frac{q'_4}{q^4}\right).$$

Donc *le plus grand diviseur commun aux polynômes* Q_1 *et* $R_1 - Q'_1$ *est précisément le produit* q_1 *des facteurs simples du polynôme* X.

De plus, *si l'on désigne par* Q_2 *et* R_2 *les quotients*

$$\frac{Q_1}{q_1}, \quad \frac{R_1 - Q'_1}{q_1},$$

on a

$$Q_2 = q_2 q_3 q_4,$$

$$Q'_2 = Q_2 \left(\frac{q'_2}{q_2} + \frac{q'_3}{q_3} + \frac{q'_4}{q_4}\right),$$

$$R_2 = Q_2 \left(\frac{q'_2}{q_2} + 2\frac{q'_3}{q_3} + 3\frac{q'_4}{q_4}\right),$$

$$R_2 - Q'_2 = Q_2 \left(\frac{q'_3}{q_3} + 2\frac{q'_4}{q_4}\right).$$

Donc *le plus grand diviseur commun aux polynômes* Q_2 et $R_2 - Q'_2$ *est le produit* q_2 *des facteurs doubles de* X.

Et l'on verrait de même que *si l'on désigne par* Q_3 *et* R_3 *les quotients*

$$\frac{Q_2}{q_2}, \quad \frac{R_2 - Q'_2}{q_2},$$

le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_3 *et* $R_3 - Q'_3$ *est le produit* q_3 *des facteurs triples de* X.

Ainsi de suite.

3. *Application numérique.*

$$X = x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^3 + 612x^2 - 108x - 432,$$

$$X' = 8x^7 - 49x^6 - 12x^5 + 590x^4 - 1036x^3 - 249x^2 + 1224x - 108,$$

$$P = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18,$$

$$Q_1 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

$$Q'_1 = 4x^3 - 30x + 10,$$

$$R_1 = 8x^3 + 7x^2 - 67x + 6,$$

$$R_1 - Q'_1 = 4x^3 + 7x^2 - 37x - 4,$$

$$q_1 = x + 4,$$

$$Q_2 = x^3 - 4x^2 + x + 6,$$

$$Q'_2 = 3x^2 - 8x + 1,$$

$$R_2 = 4x^2 - 9x - 1,$$

$$R_2 - Q'_2 = x^2 - x - 2,$$

$$q_2 = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

$$q_3 = x - 3;$$

donc

$$X = (x + 4)(x^2 - x - 2)^2(x - 3)^3.$$

4. En opérant ainsi, on détermine successivement les divers produits q_1, q_2, q_3, q_4 à l'aide de ceux qui précèdent. La proposition suivante permet d'obtenir immédiatement le produit des facteurs d'un degré quelconque de multiplicité.

THÉORÈME II. X, P, Q_1, R_1 *ayant la même signification que ci-dessus, le plus grand diviseur commun aux polynômes* Q_1 *et* $R_1 - kQ'_1$ *est précisément le produit* q_k *des premières puissances des facteurs de* X *dont le degré de multiplicité est* k.

En effet, on a successivement

$$X = q_1 q_2^2 q_3^3 \ldots q_k^k \ldots q_n^n,$$

$$(1)\quad \begin{cases} X' = X \sum_1^n k \dfrac{q'_k}{q_k}, \\ P = q_2 q_3^2 \ldots q_k^{k-1} \ldots q_n^{n-1}, \\ Q_1 = q_1 q_2 q_3 \ldots q_k \ldots q_n, \\ Q'_1 = Q_1 \sum_1^n \dfrac{q'_k}{q_k}, \\ R_1 = Q_1 \sum_1^n k \dfrac{q'_k}{q_k}, \end{cases}$$

$$(2)\quad R_1 - kQ'_1 = Q_1 \left\{ \begin{array}{l} (1-k)\dfrac{q'_1}{q_1} + (2-k)\dfrac{q'_2}{q_2} + \ldots \\ + (\overline{k-1} - k)\dfrac{q'_{k-1}}{q_{k-1}} \\ + (\overline{k+1} - k)\dfrac{q'_{k+1}}{q_{k+1}} + \ldots \\ + (n-k)\dfrac{q'_n}{q_n} \end{array} \right\},$$

et il suffit de comparer les relations (1) et (2) pour voir que le plus grand diviseur commun à Q_1 et à $R_1 - kQ_1$ est q_k.

5. *Application numérique*. Mêmes valeurs de X, X', P, Q'_1, R_1 qu'au n° 3.

$$\begin{aligned} Q_1 &= x^4 - 15x^2 + 10x + 24, \\ R_1 - Q'_1 &= 4x^3 + 7x^2 - 37x - 4, \\ R_1 - 2Q'_1 &= 7x^2 - 7x - 14, \\ R_1 - 3Q'_1 &= -4x^3 + 7x^2 + 23x - 24, \\ q_1 &= x + 4, \\ q_2 &= x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2), \\ q_3 &= x - 3. \end{aligned}$$

6. L'énoncé de la question 332 (*voir* t. XV, p. 243) doit être rectifié.

Mettons, en effet, les polynômes M et N sous la forme

$$M = M_1 M_2^2 \ldots M_k^k \ldots N_m^m,$$

$$N = N_1 N_2^2 \ldots N_n^n.$$

D'après le théorème II, le plus grand diviseur commun aux polynômes Q_1 et $R_1 - kQ_1$ est $M_k N_1$; il n'est donc égal à N que dans le cas où N est le produit des puissances premières des facteurs de X dont le degré de multiplicité est k, et M le produit de tous les autres facteurs de X. Ainsi modifiée, la question 332 ne diffère pas du théorème II.

SOLUTION DE LA QUESTION 345

(voir t. XV, p. 383);

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

$f(x) = 0$ est une équation algébrique à coefficients entiers; si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation n'a aucune racine entière. (GAUSS.)

Si $f(x)$ admettait une racine entière α, le quotient $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ aurait tous ses coefficients entiers, car le premier terme du diviseur ayant pour coefficient l'unité, la division ne peut introduire aucun dénominateur. Par suite, la valeur numérique de $f(x)$ pour toute valeur entière de x serait divisible par la valeur correspondante de $x - \alpha$, et en particulier les quotients

$$\frac{f(0)}{-\alpha}, \quad \frac{f(1)}{1-\alpha}$$

seraient entiers. Mais l'un des deux entiers consécutifs $\alpha - 1$, α est pair; donc l'un des nombres $f(0)$, $f(1)$ serait pair, ce qui est contraire à l'hypothèse.

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

V.

Loi de l'homogénéité.

On a donné de cette loi deux énoncés qui diffèrent essentiellement. Suivant quelques auteurs, la loi de l'homogénéité consisterait en ce que :

Si des lettres a, b, c,..., *qui entrent dans une équation représentent des lignes et qu'aucune ligne particulière n'ait été prise pour unité, l'équation doit être homogène ou être la somme de plusieurs équations homogènes.*

D'après cet énoncé, il se peut que l'équation obtenue, en ne prenant aucune ligne particulière pour unité, ne soit pas homogène. Or, c'est ce que d'autres auteurs n'admettent pas. Dans leur énoncé, *l'équation est nécessairement homogène.*

L'un des Traités de Géométrie analytique, où l'on trouve ce second énoncé, contient de plus les observations que voici :

« ... On fait consister maintenant le théorème de l'ho-
» mogénéité en ce que toute équation géométrique est
» nécessairement homogène, *ou*, du moins, la somme de
» plusieurs équations homogènes. Avec un pareil énoncé,
» la proposition devient évidemment insignifiante; car,
» quelle est l'équation, écrite au hasard par un algé-

» briste, qui ne puisse être conçue décomposée en équa-
» tions homogènes, d'après la seule précaution d'y grou-
» per convenablement les termes? Il est certainement
» impossible que ceux qui entendent ainsi la loi de l'ho-
» mogénéité fassent aucun usage des précieux moyens de
» vérification continue qu'elle est surtout destinée à four-
» nir spontanément dans toutes les applications possibles
» de l'analyse mathématique.

» Sans nous arrêter davantage à cette vicieuse doc-
» trine, procédons directement à la véritable explica-
» tion. »

Et l'auteur procède effectivement à une explication. Mais, ceux qui ont affirmé que l'équation peut être la somme de plusieurs équations homogènes de degrés différents, ont aussi donné une explication qui, sans doute, leur a semblé être la véritable explication. C'est pourquoi il serait utile que le *Programme officiel* fît savoir quelle est de ces deux lois la vraie loi de l'homogénéité, c'est-à-dire celle qu'il faut pouvoir expliquer pour être admis à l'Ecole Polytechnique.

Puisque rien d'officiel ne s'y oppose encore, je dirai qu'il est impossible d'admettre qu'une équation obtenue, en ne prenant aucune ligne particulière pour unité, ne soit pas homogène, si l'on adopte la définition suivante qui a été donnée par M. Cauchy (*Leçons sur le calcul différentiel*, page 216) :

« *On dit qu'une fonction de plusieurs variable est*
» HOMOGÈNE, *lorsqu'en faisant croître ou décroître tou-*
» *tes les variables dans un rapport donné, on obtient*
» *pour résultat la valeur primitive de la fonction mul-*
» *tipliée par une puissance de ce rapport. L'exposant*
» *de ce rapport est le degré de la fonction homogène.*

» En conséquence, $f(x, y, z, \ldots)$ sera une fonction
» homogène du degré a, si t désignant une nouvelle va-

NOTE

Sur une question proposée aux examens d'admission à l'École Navale (1856).

Étant données les équations

(1) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A,$$

(2) $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B,$$

(3) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C,$$

dans lesquelles a, b, c *représentent des nombres positifs, et* A, B, C *des angles compris chacun entre* 0 *et* 180 *degrés, en déduire les relations*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

et

$$A + B + C = 180° \ (*).$$

En additionnant (1) et (2), on trouve

(4) $$c = a\cos B + b\cos A.$$

(*) Pour déduire des équations proposées (1), (2), (3), l'égalité

$$A + B + C = 180°,$$

on a admis que la somme des trois angles A, B, C qui entrent dans ces équations n'excède pas 180 degrés; c'est là une restriction qui n'est pas nécessaire. Pour que

$$A + B + C = 180°,$$

il suffit que A, B, C soient des angles compris entre 0 et 180 degres, comme ceux que l'on considère ordinairement en géométrie élémentaire.

G.

Et, en retranchant (2) de (1), il vient

$$(5) \qquad a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A).$$

La multiplication des équations (4) et (5) donne ensuite

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^3 B - b^2 \cos^2 A\,;$$

d'où

$$a^2(1 - \cos^2 B) = b^2(1 - \cos^2 A)$$

et

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A.$$

Les quantités a, b, $\sin B$, $\sin A$ étant positives, l'équation

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A$$

revient à

$$a \sin B = b \sin A.$$

On en tire

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

On démontrerait de même que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Pour établir l'égalité

$$A + B + C = 180^\circ,$$

divisons par c tous les termes de l'équation

$$(4) \qquad c = a \cos B + b \cos A,$$

il en résultera

$$1 = \frac{a}{c} \cos B + \frac{b}{c} \cos A.$$

Or, les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donnent

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

donc

$$1 = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin C},$$

d'où

(6) $$\sin C = \sin(A + B).$$

On trouverait de même

(7) $$\sin B = \sin(A + C).$$

Par suite

$$\sin C + \sin B = \sin(A + B) + \sin(A + C)$$

ou

$$2 \sin\left(\frac{C + B}{2}\right) \cos\left(\frac{C - B}{2}\right)$$
$$= 2 \sin\left(A + \frac{C + B}{2}\right) \cos\left(\frac{C - B}{2}\right),$$

équation qui se réduit à

(8) $$\sin\left(\frac{C + B}{2}\right) = \sin\left(A + \frac{C + B}{2}\right).$$

L'angle $\frac{C + B}{2}$ étant moindre que 180 degrés, on a

$$\sin\left(\frac{C + B}{2}\right) > 0,$$

et, par conséquent,

$$\sin\left(A + \frac{C + B}{2}\right) > 0.$$

De cette dernière inégalité on peut conclure

$$A + \frac{C+B}{2} < 180^\circ,$$

parce que, d'après l'hypothèse, $A + \frac{C+B}{2}$ est moindre que 360 degrés. Les angles inégaux $\frac{C+B}{2}$, $A + \frac{C+B}{2}$, compris entre 0 et 180 degrés, ayant le même sinus (8), sont nécessairement supplémentaires. Donc

$$A + B + C = 180^\circ.$$

G.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 344 (MANNHEIM)

(voir t. XV, p. 383);

PAR M. CREMONA,
Professeur à l'université de Padoue.

Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points A, O, celles des points B, C seront de la forme

$$x_3 = x_1 + \lambda h, \quad y_3 = y_1 + \lambda k,$$
$$x_4 = x_1 + \mu m, \quad y_4 = y_1 + \mu n,$$

h, k, l, m sont des quantités données, λ, μ deux indéterminées; donc

$$2\,\mathrm{ABO} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix},$$

et analogiquement

$$2\,\mathrm{AOC} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ABO}}+\frac{1}{\mathrm{AOC}}\right)=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ \lambda h-\mu m & \lambda k-\mu n \end{vmatrix}}{\lambda\mu \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_k-y_2 \\ m & n \end{vmatrix}};$$

mais les points B, C, O étant en ligne droite, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}=0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ \lambda h-\mu m & \lambda k-\mu n \end{vmatrix}-\lambda\mu \begin{vmatrix} k & h \\ n & m \end{vmatrix}=0,$$

par conséquent,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ABO}}+\frac{1}{\mathrm{AOC}}\right)=\frac{\begin{vmatrix} k & h \\ m & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ m & n \end{vmatrix}},$$

quantité indépendante de λ, μ. Donc, etc.

Théorème analogue dans l'espace.

Par un point O situé dans l'intérieur d'un triangle trièdre de sommet A, on mène un plan qui coupe les arêtes du trièdre dans les points B, C, D. Soient ν, ν_2, ν_3 les valeurs des trois pyramides AOCD, AODB, AOBC; je dis que la somme

$$\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2\nu_3}}+\sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3\nu_1}}+\sqrt{\frac{\nu_3}{\nu_1\nu_2}}$$

est constante, de quelque manière qu'on mène le plan sécant.

Soient x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_5, y_5, z_5 les coor-

données des cinq points A, O, B, C, D; x_1, y_1, z_1, x_2 y_2, z_2 sont des quantités données ainsi que les α, β, γ on aura

$$\frac{x_3 - x_1}{\alpha_1} = \frac{y_3 - y_1}{\beta_1} = \frac{z_3 - z_1}{\gamma_1} = \lambda,$$

$$\frac{x_4 - x_1}{\alpha_2} = \frac{y_4 - y_1}{\beta_2} = \frac{z_4 - z_1}{\gamma_2} = \mu,$$

$$\frac{x_5 - x_1}{\alpha_3} = \frac{y_5 - y_1}{\beta_3} = \frac{z_5 - z_1}{\gamma_3} = \nu,$$

donc

$$6v_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = \mu\nu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mu\nu A,$$

et par analogie

$$6v_2 = \nu\lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \nu\lambda B,$$

$$6v_3 = \lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu C,$$

A, B, C sont des quantités connues; d'où

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} \frac{v_1 + v_2 + v_3}{\sqrt{v_1 v_2 v_3}} = \frac{\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu C}{\lambda\mu\nu \sqrt{ABC}}.$$

Mais les points O, A, B, C étant dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

remplaçant x_3 par $\lambda\alpha_1 + x_1$, y_3 par $\lambda\beta_1 + y_1$, z_3 par $\lambda\gamma_1 + z_1$, etc., on obtient

$$\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu B \pm \lambda\mu\nu \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu D,$$

donc

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}}\left(\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2\nu_3}} + \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3\nu_1}} + \sqrt{\frac{\nu_3}{\nu_1\nu_2}}\right) = \frac{D}{\sqrt{ABC}},$$

quantité indépendante de λ, μ, ν.

C'est ce qu'il fallait prouver.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 348

(voir t. XV, p. 407);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Étant donnés une conique dont les foyers sont F et F′ et un point quelconque M dans le plan de cette conique; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B et MF′ rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD},$$

le signe — répondant au cas où le point M est extérieur.

Ellipse. Soit

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de la courbe; par le centre menons deux diamètres respectivement parallèles aux sécantes données AB et CD. Leurs équations seront

$$(2) \qquad y = mx, \quad y = m'x$$

et celles des secantes parallèles qui passent par les foyers seront

(3) $$y = m(x + c), \quad y = m'(x - c).$$

Si nous désignons par d et d' les demi-diamètres et par (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des points où ils rencontrent la courbe, nous aurons

$$d^2 = x'^2 + y'^2, \quad d'^2 = x''^2 + y''^2,$$

et, en éliminant (x', y'), (x'', y'') entre ces deux équations et les équations (1) et (2),

(4) $$d^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2}, \quad d'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m'^2)}{a^2 m^2 + b^2},$$

d'où

(5) $$\frac{d^2}{d'^2} = \frac{(1 + m^2)(a^2 m'^2 + b^2)}{(1 + m'^2)(a^2 m^2 + b^2)}.$$

Désignons par S et S' les longueurs AB, CD des sécantes données et exprimons S et S' en fonction des coordonnées

$$[(x_1, y_1)(x'_1, y'_1)], \quad [(x_2, y_2)(x'_2, y'_2)]$$

des points où elles rencontrent la courbe. Les abscisses de ces points nous seront données par les deux équations suivantes :

$$(a^2 m^2 + b^2) x^2 + 2a^2 m^2 cx + a^2 m^2 c^2 - a^2 b^2 = 0,$$
$$(a^2 m'^2 + b^2) x^2 - 2a^2 m'^2 cx + a^2 m'^2 c^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Nous aurons donc

$$x_1 - x'_1 = \frac{\sqrt{4 a^4 m^4 c^2 - 4 (a^2 m^2 + b^2)(a^2 m^2 c^2 - a^2 b^2)}}{(a^2 m^2 + b^2)},$$

d'où l'on tire, en remplaçant c^2 par sa valeur $a^2 - b^2$ et

réduisant,

$$(6) \qquad (x_1 - x'_1)^2 = \frac{2n^2 b^4 (1 + m^2)}{(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

On obtient $(x_2 - x_2')^2$ en changeant m en m' dans l'expression (6). On a ainsi

$$(7) \qquad (x_2 - x'_2) = \frac{2 a^2 b^4 (1 + m'^2)}{(a^2 m'^2 + b^2)^2}.$$

Il est facile de passer du carré des différences des abscisses à celui des ordonnées; car les équations (3) donnent

$$y_1 - y'_1 = m(x_1 - x'_1),$$
$$y_2 - y'_2 = m'(x_2 - x'_2),$$

et il vient

$$(8) \qquad (y_1 - y'_1)^2 = \frac{2 a^2 b^4 (1 + m^2) m^2}{(a^2 m^2 + b^2)^2},$$

$$(9) \qquad (y_2 - y'_2)^2 = \frac{2 a^2 b^4 (1 + m'^2) m'^2}{(a^2 m'^2 + b^2)^2}.$$

Faisons la somme des expressions (6) et (8), (7) et (9) et extrayons les racines carrées, nous obtiendrons S et S':

$$(10) \qquad S = \frac{2ab^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2},$$

$$(11) \qquad S' = \frac{2ab^2 (1 + m'^2)}{a^2 m'^2 + b^2},$$

d'où

$$(12) \qquad \frac{S}{S'} = \frac{(1 + m^2)(a^2 m'^2 + b^2)}{(1 + m'^2)(a^2 m^2 + b^2)},$$

et, à cause du rapport commun aux relations (5) et (12),

$$\frac{S}{S'} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

Mais on a (Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, page 377)

$$\frac{\text{MA.MB}}{\text{MC.MD}} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

Nous aurons donc, en remplaçant $\frac{S}{S'}$ par sa valeur,

$$\frac{\text{AB}}{\text{CD}} = \frac{\text{MB} \pm \text{MA}}{\text{MD} \pm \text{MC}} = \frac{\text{MA.MB}}{\text{MC.MD}}$$

ou

$$\frac{1}{\text{MA}} \pm \frac{1}{\text{MB}} = \frac{1}{\text{MC}} \pm \frac{1}{\text{MD}},$$

et on voit facilement que le signe — doit être pris dans le cas où le point M est extérieur.

Hyperbole. La démonstration serait absolument la même, à quelques signes près qui changent dans les formules intermédiaires.

Parabole. Dans la parabole, l'un des foyers s'éloignant à l'infini, l'une des sécantes menées par le point M devient parallèle à l'axe, MB devient infini et l'on a

$$\frac{1}{\text{MA}} = \frac{1}{\text{MC}} \pm \frac{1}{\text{MD}}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 295

(voir t. XIII, p. 318);

PAR M. L. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques.

Soit

(1) $$F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe quelconque; par un point P

(α, β) pris dans son plan menons des normales qui la rencontreront, par exemple, en m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (*); si (x_i, y_i) sont les coordonnées d'un quelconque A_i de ces points, ces coordonnées seront données par les équations

$$(2)\qquad \frac{dF}{dx_i}(\beta - y_i) = \frac{dF}{dy_i}(\alpha - x_i),$$

$$(3)\qquad F(x_i, y_i) = 0.$$

Si nous désignons par n_i la distance du point P, (α, β) au point A_i, (x_i, y_i), on aura

$$(4)\qquad n_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i).$$

Supposons qu'on établisse entre les longueurs n_i de ces normales la relation

$$(5)\qquad \varphi(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m) = 0.$$

Si l'on substitue dans l'équation (5) les valeurs des x_i, y_i, déduites des équations (2) et (3) en fonction de α et β, on aura le lieu des points P pour lesquels cette relation est satisfaite.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe P sera donné par l'équation

$$d\alpha \sum \frac{d\varphi}{dn_i}\frac{dn_i}{d\alpha} + d\beta \sum \frac{d\varphi}{dn_i}\frac{dn_i}{d\beta} = 0:$$

si l'on remarque que l'on a la relation

$$\frac{dF}{dx_i}\frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dF}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha} = 0,$$

qui devient, en vertu de l'équation (2),

$$(\alpha - x_i)\frac{dx_i}{d\alpha} + (\beta - y_i)\frac{dy_i}{d\alpha} = 0,$$

(*) Si p est le degré de la courbe, alors $m = p^2$. TM.

on trouvera que

$$\frac{dn_i}{d\alpha} = \frac{\alpha - x_i}{n_i};$$

et par un calcul semblable

$$\frac{dn_i}{d\beta} = \frac{\beta - y_i}{n_i},$$

n_i ayant la valeur (4).

On aura donc pour le coefficient angulaire de la tangente à la courbe P au point (α, β) la valeur suivante :

$$(6) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha - \dfrac{\sum \dfrac{1}{n_i}\dfrac{d\varphi}{dn_i} x_i}{\sum \dfrac{1}{n_i}\dfrac{d\varphi}{dn_i}}}{\beta - \dfrac{\sum \dfrac{1}{n_i}\dfrac{d\varphi}{dn_i} y_i}{\sum \dfrac{1}{n_i}\dfrac{d\varphi}{dn_i}}}.$$

Considérons maintenant un point Q ayant pour coordonnées (a, b) et désignons par l_i la distance de ce point au point A_i, de sorte qu'on aura

$$(7) \qquad l_i^2 = (a - x_i)^2 + (b - y_i)^2.$$

Déterminons le lieu des points Q par la condition que la relation

$$(8) \qquad \varphi(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_m) = 0$$

soit satisfaite, φ étant la même caractéristique que dans l'équation (5).

La courbe P sera donc déterminée par les équations (2), (3), (4) et (5) entre lesquelles on éliminera les x_i et y_i; la courbe Q sera déterminée par les équations (2), (3), (7) et (8) entre lesquelles on éliminera les x_i et y_i.

Or, les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donnent

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

donc

$$1 = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin C},$$

d'où

(6) $$\sin C = \sin (A + B).$$

On trouverait de même

(7) $$\sin B = \sin (A + C).$$

Par suite

$$\sin C + \sin B = \sin (A + B) + \sin (A + C)$$

ou

$$2 \sin \left(\frac{C + B}{2}\right) \cos \left(\frac{C - B}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \left(A + \frac{C + B}{2}\right) \cos \left(\frac{C - B}{2}\right),$$

équation qui se réduit à

(8) $$\sin \left(\frac{C + B}{2}\right) = \sin \left(A + \frac{C + B}{2}\right).$$

L'angle $\frac{C + B}{2}$ étant moindre que 180 degrés, on a

$$\sin \left(\frac{C + B}{2}\right) > 0,$$

et, par conséquent,

$$\sin \left(A + \frac{C + B}{2}\right) > 0.$$

De cette dernière inégalité on peut conclure

$$A + \frac{C+B}{2} < 180^\circ,$$

parce que, d'après l'hypothèse, $A + \frac{C+B}{2}$ est moindre que 360 degrés. Les angles inégaux $\frac{C+B}{2}$, $A + \frac{C+B}{2}$, compris entre 0 et 180 degrés, ayant le même sinus (8), sont nécessairement supplémentaires. Donc

$$A + B + C = 180^\circ.$$

G.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 344 (MANNHEIM)

(voir t. XV, p. 383);

PAR M. CREMONA,
Professeur à l'université de Padoue.

Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points A, O, celles des points B, C seront de la forme

$$x_3 = x_1 + \lambda h, \quad y_3 = y_1 + \lambda k,$$
$$x_4 = x_1 + \mu m, \quad y_4 = y_1 + \mu n,$$

h, k, l, m sont des quantités données, λ, μ deux indéterminées; donc

$$2\,\text{ABO} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix},$$

et analogiquement

$$2\,\text{AOC} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}.$$

k^2 étant une constante, alors

$$\xi = \frac{\Sigma x_i}{m},$$

$$\eta = \frac{\Sigma y_i}{m},$$

le point G est le centre de gravité des points A_1, A_2,..., A_m.

Lorsque $\varphi = \sum n_i - k^2 = 0$,

$$\xi = \frac{\sum \frac{x_i}{n_i}}{\sum \frac{1}{n_i}},$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{y_i}{n_i}}{\sum \frac{1}{n_i}}.$$

Lorsque $\varphi = n_1, n_2, \ldots, n_m - k^2 = 0$,

$$\xi = \frac{\sum \frac{x_i}{n_i^2}}{\sum \frac{1}{n_i^2}},$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{y_i}{n_i^2}}{\sum \frac{1}{n_i^2}};$$

ce qui fournit deux autres théorèmes analogues à celui qui est énoncé dans la question que je traite.

4°. Si l'on suppose que les points A_i aient des masses respectivement égales à $\frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}$, qu'on compose ces masses comme des forces et qu'on désigne par G_1 le point d'application de la résultante, la normale à la courbe Q,

au point quelconque (a, b) passera par le point G_1.

Pour les mêmes points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ correspondants au point (α, β) de la courbe P, le point G_1 variera en même temps que le point (a, b) sur la courbe Q correspondante au même point (α, β).

Pour démontrer la proposition, remarquons que le point G_1 a pour coordonnées

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}x_i}{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}}, \\ \eta_1 &= \frac{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}y_i}{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}}. \end{aligned}\right.$$

L'équation de la normale au point quelconque (a, b) est

$$(13)\qquad \frac{db}{da} = -\frac{X-a}{Y-b},$$

$\frac{db}{da}$ ayant la valeur (9), X et Y étant les coordonnées courantes. Il est évident que l'équation (13) est vérifiée pour

$$X = \xi_1 \quad \text{et} \quad Y = \eta_1.$$

Lorsque $\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0$,

$$\xi_1 = \frac{\Sigma x_i}{m},$$

$$\eta_1 = \frac{\Sigma y_i}{m},$$

alors le point G_1 coïncide avec le point G ; donc toutes les normales à la courbe Q passent par le même point G ; donc, dans ce cas, la courbe Q est un cercle qui a son

centre en G, et qui a pour rayon la distance du point G au point (α, β).

Le calcul direct conduit au même résultat. En effet, l'équation de la courbe Q est, dans ce cas,

$$\sum[(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2] = k^2.$$

Or cette équation, en ayant égard à l'équation

$$\sum[(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2] = k^2,$$

lieu des points P, peut se mettre sous la forme

$$(a - \xi)^2 + (b - \eta)^2 = (\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2,$$

où

$$\xi = \frac{\Sigma x_i}{m}, \quad \eta = \frac{m}{\Sigma y_i},$$

ce qui vérifie parfaitement l'énoncé précédent.

5°. Le lieu du point G_1 s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (8) et (11).

Dans le cas de

$$\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0,$$

ce lieu est le point G.

Le lieu des points G s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations (5) et (10).

6°. Il résulte de la proposition 2° que la courbe P est l'enveloppe des courbes Q (*).

On peut d'ailleurs vérifier cette propriété par le calcul

Application.

Prenons pour la courbe (1)

$$y^2 = 2px,$$

(*) Car (α, β) est un point quelconque de la courbe P. Tr.

et supposons

$$\varphi = \sum n_i - k^2 = 0.$$

Les (x_i, y_i) seront donnés par les équations

$$y^2 = 2px,$$
$$(\alpha - x)y + p(\beta - y) = 0,$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$(14) \qquad \begin{cases} y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0, \\ x = \dfrac{y^2}{2p}. \end{cases}$$

Soient y_1, y_2, y_3 les trois racines de la première des équations (14) et x_1, x_2, x_3 les valeurs correspondantes données par la seconde; on aura, sachant que

$$n_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2,$$

$$(15) \qquad \begin{cases} 3(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha(x_1 + x_2 + x_3) - 2\beta(y_1 + y_2 + y_3) \\ \qquad + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = k^2. \end{cases}$$

En s'appuyant sur les formules qui donnent la somme des puissances semblables des racines en fonction des coefficients, on trouve

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -4p(p - \alpha),$$
$$y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 = 8p^2(p - \alpha)^2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2p}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = -2(p - \alpha),$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2(p - \alpha)^2.$$

L'équation de la courbe P sera donc

$$(16) \qquad \alpha^2 + 3\beta^2 + 4p\alpha = 2p^2 + k^2;$$

c'est une ellipse dont l'un des axes principaux est dirigé suivant l'axe des x (*).

On trouvera facilement

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi = -\frac{2}{3}(\alpha + p), \\ \eta = 0. \end{cases}$$

La courbe Q est un cercle dont le centre sera donné par les valeurs (17) et son rayon est égal à la distance du point (α, β) au point (ξ, η). La courbe Q aura donc pour équation

$$(18)\qquad \left[a + \frac{2}{3}(\alpha + p)\right]^2 + b^2 = \frac{1}{9}(\alpha - 2p)^2 + \beta^2.$$

Les coordonnées du point G_1 seront

$$(19)\qquad \begin{cases} \xi_1 = -\frac{2}{3}(\alpha + p), \\ \eta_1 = 0. \end{cases}$$

Le lieu des points G_1 s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (18) et (19), ce lieu est donc un point déterminé par les équations (19).

Le lieu des points G s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations (16) et (17); ce lieu est donc la droite $\eta = 0$, c'est-à-dire l'axe des x, ce qui constitue une propriété remarquable dont il est facile de donner l'énoncé.

Les propriétés générales que nous venons d'établir subsistent non-seulement pour des courbes algébriques, mais encore pour les courbes transcendantes telles, que les normales menés d'un point quelconque à la courbe sont en nombre fini (**).

(*) Lorsque la courbe donnée est une conique quelconque, la courbe P, dans le cas actuel, est aussi une conique. Tm.

(**) Dans une courbe transcendante, les normales sont toujours en nombre infini, en comprenant les normales imaginaires et celles qui sont

THÉORÈME DE M. BRIOSCHI

(voir t. XV, p. 366);

PAR M. A. GENOCCHI.

La question générale de M. Brioschi se résout bien facilement.

Soit une équation algébrique

$$f(x) = x^n - ax^{n-1} + \ldots \pm l = 0;$$

soient α et β deux de ses racines, p la somme de toutes les autres, q leur produit, r le produit des différences de ces $n-2$ racines prises deux à deux; soient s et t les produits formés avec les différences entre α ou β et chacune des autres $n-2$ racines; enfin désignons par Δ le produit des carrés des différences de toutes les n racines deux à deux, et par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$. Nous aurons

$$(1) \qquad \alpha + \beta = a - p, \quad \alpha\beta = \frac{l}{q},$$

$$(2) \qquad \begin{cases} f'(\alpha) = (\alpha - \beta)s, \\ f'(\beta) = (\beta - \alpha)t, \\ \sqrt{\Delta} = (\beta - \alpha)rst. \end{cases}$$

Ces équations donnent

$$r\frac{f'(\alpha)f'(\beta)}{\sqrt{\Delta}} = \alpha - \beta;$$

mais $f'(\alpha) \cdot f'(\beta)$ étant une fonction symétrique entière de α et β, s'exprimera rationnellement à l'aide des équa-

---

situées à l'infini; on ne saurait en faire abstraction dans l'analyse. Il serait intéressant et facile d'étendre ces recherches aux surfaces. TM.

tions (1). On aura donc

$$\alpha + \beta \quad \text{et} \quad \alpha - \beta,$$

et, par suite, α et β exprimés rationnellement en fonction des autres racines : ces racines y entreront par l'intermédiaire des trois fonctions p, q, r, dont les deux premières sont symétriques, et la troisième n'a que deux valeurs égales, mais de signes contraires.

Pour l'équation du troisième degré, on n'a qu'à faire

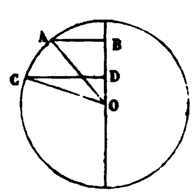
$$a = 0, \quad p = q = i, \quad r = \pm 1,$$

i désignant une des racines.

SOLUTION DE LA QUESTION 352;

PAR M. DE ROCHAS,
Élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Étant donné le volume d'un secteur sphérique, trouver la valeur extrême de l'aire totale. Discussion du problème.



Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la hauteur h de la zone qui lui sert de base par un facteur constant $\frac{2}{3}\pi R^2$; par suite, si le volume est donné, h est une quantité constante.

Donc, pour connaître les variations de l'aire totale du secteur engendré par le secteur circulaire ACO tournant autour de BO, aire qui a pour mesure

$$2\pi R h + \pi R(AB + CD),$$

il suffit d'étudier les variations de AB + CD.

Or, si nous appelons x l'angle AOB et y l'angle COB, la question revient à chercher le maximum de

$$(1) \qquad R(\sin x + \sin y) = m,$$

sachant que

$$(2) \qquad R(\cos x - \cos y) = h.$$

Comme les angles x et y ne peuvent varier que de 0 à 180 degrés, leurs sinus seront toujours positifs; par suite, au lieu de chercher le maximum de m, on peut chercher le maximum de m^2.

Elevant au carré les équations (1) et (2) et les ajoutant, il vient

$$2R^2(1 + \sin x \sin y - \cos x \cos y) = m^2 + h^2$$

ou

$$m^2 = 2R^2[1 - \cos(x + y)] - h^2.$$

Dans le second membre, il n'y a que $\cos(x+y)$ qui soit variable; il est clair que m^2 sera maximum quand $\cos(x+y)$ sera égal à -1.

Mais alors

$$x + y = 180°,$$

$$m = R(\sin x + \sin y) = 2R\sin x,$$

$$h = R(\cos x - \cos y) = 2R\cos x,$$

d'où

$$\cos x = \frac{h}{2R}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2R}, \quad m = \sqrt{4R^2 - h^2},$$

Remplaçant h par sa valeur en fonction du volume V donné, il vient

$$m = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{3V}{2\pi R^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16\pi^2 R^6 - 9V^2}}{2\pi R^2}.$$

Remplaçant m par sa valeur dans l'expression de la surface cherchée, on a pour cette surface s

$$s = \frac{3V}{R} + \frac{\sqrt{(4\pi R^3)^2 - (3V)^2}}{2R}.$$

On voit que la condition de possibilité du problème est

$$V < \frac{4}{3}\pi R^3.$$

QUESTION PROPOSÉE AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (1856);

RÉSOLUE PAR MM. SAUGE ET CLUTE,
Élèves de l'Institution Loriol.

Trouver deux nombres entiers dont le rapport soit égal à la différence.

SOLUTION DE M. SAUGE.

J'appelle x et y les nombres cherchés. On aura

$$\frac{x}{y} = x - y,$$

d'où

$$x = \frac{y^2}{y-1}.$$

Actuellement je pose

$$y - 1 = a.$$

Il en résultera

$$x = \frac{(a+1)^2}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a}$$

Or x doit être entier, donc $\frac{1}{a}$ est entier ; il s'ensuit

$$a = 1,$$

et, par conséquent,

$$y = 2, \quad x = 4.$$

SOLUTION DE M. CLUTE.

L'équation

$$\frac{x}{y} = x - y$$

donne

$$x = \frac{y^2}{y-1}.$$

De ce que x est entier, il résulte que $y - 1$ doit diviser y^2. Or $y - 1$ est premier avec y qui est le nombre entier immédiatement supérieur à $(y - 1)$. Il s'ensuit que $y - 1$ est premier avec y^2. Donc $y - 1$ ne peut diviser y^2 qu'autant que $y - 1$ est égal à 1. D'où

$$y = 2,$$

et, par conséquent,

$$x = 4.$$

Note. L'équation générale est

$$x(y + a) = f(y),$$

a est un nombre et f désigne une fonction entière à coefficients entiers. L'opération $\frac{f(y)}{y+a}$ amène le résidu frac-

tionnaire $\frac{p}{y+a}$, et il y a autant de solutions que le nombre entier p a de diviseurs, l'unité comprise. Tm.

QUESTION D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1856).

Reconnaître à PRIORI *que l'équation*

$$xy + yz + xz = 0$$

représente un cône droit à base circulaire (les coordonnées étant supposées rectangulaires).

Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, toute équation du second degré

$$f(x, y, z) = 0,$$

symétrique par rapport aux trois coordonnées x, y, z, représente une surface de révolution autour de la droite $x = z$, $y = z$; en supposant toutefois que cette équation représente une surface. C'est ce que nous allons démontrer.

Remarquons d'abord que l'équation proposée

$$f(x, y, z) = 0,$$

étant, d'après l'hypothèse, symétrique par rapport aux deux coordonnées x, y, le plan qui divise en deux parties égales le dièdre que forment les deux plans coordonnés ZX, ZY est nécessairement un plan *principal*. En effet, nommons M un point quelconque de la surface et a, b, c les coordonnées x, y, z de ce point; l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

admettra la solution

$$x = a, \quad y = b, \quad y = c.$$

Désignons par M' le point symétrique de M par rapport au plan bissecteur considéré ; les coordonnées x, y, z de M' auront pour valeurs b, a, c. Or il est supposé que l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

conserve les mêmes solutions lorsqu'on y change x en y et y en x; donc on peut conclure de ce que cette équation admet la solution

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

qu'elle admet aussi la solution

$$x = b, \quad y = a, \quad z = c.$$

Ainsi le point M' appartient à la surface, et, par conséquent, le plan bissecteur $x = y$ est un plan principal de la surface.

On démontrera de même que les deux plans bissecteurs $x = z$, $y = z$ sont des plans principaux.

Cela posé, menons un plan perpendiculaire à l'intersection $[x = z, y = z]$ des trois plans principaux en un point quelconque C de cette droite. Ce nouveau plan coupera les trois premiers suivant trois droites passant par le point C et qui seront des axes de la courbe déterminée par son intersection avec la surface. Cette courbe du *second degré* ayant trois axes est nécessairement une circonférence dont le centre se trouve au point C sur la droite $x = z$, $y = z$. Il en résulte que l'équation proposée

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une surface de révolution autour de la droite $x = z$, $y = z$.

De ce principe, on conclut immédiatement que le cône représenté par l'équation homogène

$$xy + yz + xz = 0$$

est un cône de révolution dont l'axe a pour équations

$$x = z, \quad y = z.$$

G.

RECTIFICATION ET SOLUTION DE LA QUESTION 289

(voir t. XIII, p. 192, et t. XIV, p. 32);

PAR M. L. BOURDELLES,
Élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Si dans un triangle rectiligne ABC on a

$$A < B:$$

1° si l'on mène aux côtés opposés les transversales AD et BE telles que

$$CAD \gtreqless CBE,$$

alors

$$AD > BE \text{ (*)};$$

2° si

$$AD = BE \quad \text{et} \quad \frac{DAB}{DAC} = \frac{EBA}{EBC},$$

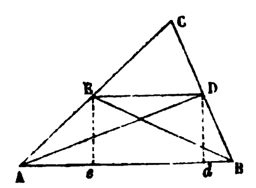
alors

$$A = B.$$

1°. Si les triangles CAD, CBE sont égaux en surface,

(*) Cette conclusion n'est pas vraie dans tous les cas, comme on le verra plus loin.

les triangles DAB, EBA le seront aussi, et comme ils ont



même base AB, leurs hauteurs Dd, Ee seront égales, donc la ligne ED, qui joint les sommets E, B, sera parallèle à AB. Mais les triangles rectangles AeE, BdD montrent que

$$Ae > Bd, \quad \text{car} \quad A < B, \quad AE > BD,$$

puisque

$$AC > CB \quad \text{et} \quad Ee = Dd;$$

on aura donc

$$Ae + ed > Bd + ed$$

ou

$$Ad > Be,$$

et, par conséquent,

$$AD > BE,$$

à cause des triangles rectangles AdD, BeE.

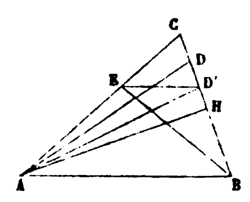
On a supposé que les transversales rencontraient les côtés du triangle. Le théorème existe encore si elles rencontrent ces côtés prolongés dans le sens AC et BC. On a au contraire AD $<$ BE, si elles rencontrent les côtés prolongés en sens contraire.

2°. On a

$$CAD < CBE.$$

Abaissons du point A sur BC la perpendiculaire AH. Supposons CBE $\leq$ CAH; si par le point E on mène la parallèle ED′ au côté AB, en joignant au point A le

point D′ où elle rencontre BC, on aura, en vertu de ce



qui précède

$$EB < AD' \leqq AD.$$

C. Q. F. D.

Mais si CBE > CAH, le théorème n'existe plus (*).

De la relation

$$\frac{DAB}{DAC} = \frac{EBA}{EBC},$$

on déduit

$$\frac{DAB}{ABC} = \frac{EBA}{ABC}.$$

Donc

$$AB . EB . \sin EBA = AB . AD . \sin DAB,$$

c'est-à-dire que dans tous les cas les angles EBA, DAB sont égaux; par conséquent les triangles EBA, DAB sont aussi égaux. Donc

$$A = B.$$

On peut démontrer le théorème proposé en supposant que CAD et CBE désignent des angles. En effet, si

$$CAD = CBE,$$

les triangles CAD, CBE sont semblables et on a

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{EB}.$$

(*) On voit à priori que le théorème n'est pas toujours vrai, car si l'on suppose CBE différant très-peu de la surface du triangle, et CAD différant

Mais

$$AC > BC,$$

donc

$$AD > EB.$$

C. Q. F. D.

Ce théorème est vrai aussi quand les transversales rencontrent les prolongements des côtés.

Mais si $CAD < CBE$, le théorème ne subsiste que lorsque $EBC < 90 - E - \ldots$

Nota. Ces diverses propositions se démontrent facilement par la trigonométrie, qui a l'avantage de montrer clairement les restrictions à apporter dans l'énoncé.

SUR L'ELLIPSE DE CASSINI;

D'APRÈS M. H. D'ARREST.

(*Astron. Nachr.* 1854, t. XXXVIII, p. 199.)

1. Soient:

$2e$ = la distance des deux foyers;

$2a$ = le grand axe;

d = le produit constant des rayons vecteurs.

On a pour l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires et focales, origine au centre,

$$(1)\quad \begin{cases} (x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) - d^4 + e^4 = 0, \\ \rho^4 - 2e^2\rho^2\cos^2\varphi - d^4 + c^4 = 0. \end{cases}$$

Prenons a pour unité et désignons le demi petit axe par b, de sorte que $d^2 + e^2 = 1$, $b^2 = d^2 - e^2$,

$$(2)\qquad e = \sqrt{\frac{1-b^2}{2}},\quad d = \sqrt{\frac{1+b^2}{2}},$$

---

aussi très-peu de CAH, on aura $EB > AD$, ce qui est le contraire de ce qu'indique l'énoncé.

2. Supposons que l'on n'ait que deux plans A_1, A_2 parallèles au plan des xz et donnés par les équations

$$y = \alpha, \quad y = \beta,$$

et si l'on a les relations

$$X = \frac{\beta x}{\beta - \alpha + y},$$

$$Y = \frac{\beta y}{\beta - \alpha + y},$$

$$Z = \frac{\beta z}{\beta - \alpha + y}.$$

le point X, Y, Z est dit l'image *bas-relief* du point x, y, z, l'œil étant placé à l'origine des coordonnées.

Etant donnée l'équation d'une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'image *bas-relief* de cette surface est une autre surface

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

Si les deux plans se confondent, alors $\beta = \alpha$ et

$$X = \frac{\beta x}{y},$$

$$Y = \beta,$$

$$Z = \frac{\beta z}{y}:$$

on a la perspective ordinaire sur un seul plan, et les trois dimensions sont figurées par deux dimensions.

Si $\beta - \alpha$, intervalle de deux plans A_1, A_2, devient infini, alors

$$X = x,$$

$$Y = y,$$

$$Z = z,$$

c'est-à-dire l'image se confond avec l'objet, et on a la ronde bosse; dans tout autre cas, les dimensions sont altérées (*).

GRAND CONCOURS DE 1856

(voir t. XIV, p. 414).

CLASSE DE LOGIQUE (SECTION DES SCIENCES) (4 JUILLET).

Mathématiques.

Etant donnés un cercle et deux perpendiculaires à l'extrémité d'un diamètre AB, mener une tangente CD telle, que le volume engendré par le trapèze ainsi formé tournant autour du diamètre AB soit égal à une sphère de rayon donné.

Exposer la méthode à suivre pour la résolution des questions de maximum et de minimum, et appliquer la méthode à l'exemple suivant : Dans un triangle rectangle dans lequel la somme des côtés de l'angle droit est constante, trouver la perpendiculaire maximum abaissée sur l'hypoténuse.

CLASSE DE SECONDE (SCIENCES) (4 JUILLET).

Mathématiques.

1°. Volume de la pyramide tronquée et du tronc de cône.

2°. Trouver le rayon de la base supérieure d'un tronc de cône, sachant que le rayon de la base inférieure égale le rayon d'une sphère donnée et que le volume du tronc

---

(*) M. Poudra a composé un Traité complet de perspective où se trouve une nouvelle théorie des bas-reliefs. La publication de cet ouvrage serait profitable aux savants et aux artistes.

de cône et celui de la sphère sont dans un rapport donné.

Physique (29 *juillet*).

1°. Un ballon de verre dont le volume extérieur est de 10 mètres cubes à zéro degré est en équilibre dans l'air sec à cette température et à la pression de $0^m,75$. Ceci posé, on suppose que la température s'élève à 30 degrés, que l'air se sature d'humidité à cette température, que la pression totale devienne $0^m,745$. On demande d'exprimer en grammes les variations que ces changements des conditions atmosphériques auront apportées à la perte de poids que le ballon éprouve par le fait de son immersion dans l'air.

Le coefficient cubique du verre $= \frac{1}{38700}$;
Tension maximum de la vapeur à 30 degrés $= 0,0035$;
Densité de la vapeur par rapport à l'air $= \frac{5}{8}$.

2°. Exposer les méthodes à l'aide desquelles on peut déterminer le nombre de vibrations qui répond à un son donné.

CLASSE DE RHÉTORIQUE (SCIENCES).

Mathématiques.

1°. Des éclipses.

2°. On demande les deux intersections de deux paraboles dont on connaît les directrices et les foyers.

Mécanique.

Les lois du mouvement démontrées d'après les machines d'Atwood et de Morin.

CLASSE DE TROISIÈME (SCIENCES).

Mathématiques.

1°. Extraire la racine carrée de 19 à moins de 0,01 et exposer sur cet exemple la théorie de l'opération.

2°. On inscrit dans un cercle un quadrilatère ABCD dont deux côtés contigus AB, AC sont égaux; on tire les deux diagonales AD, BC qui se coupent en un point T. On demande de démontrer que chacun des côtés égaux AB, AC est moyen proportionnel entre la diagonale entière AD et le segment AT de la diagonale AD.

Mathématiques spéciales.

1°. Démontrer que si quatre forces se font équilibre, on peut considérer leurs directions comme des génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe.

Note. Ce théorème est connu depuis longtemps. Il est dû à M. Chasles, qui, après avoir démontré celui-ci : *Quand quatre forces se font équilibre, le volume du tétraèdre construit sur deux quelconques d'entre elles (prises pour arêtes opposées) est égal au volume du tétraèdre construit sur les deux autres*, ajoute : « Quatre forces qui se » font équilibre jouissent de plusieurs autres propriétés, » par exemple, de celle-ci, facile à démontrer : *Ces quatre » forces sont toujours les génératrices d'un même mode » de génération d'un hyperboloïde à une nappe.* » (*Mémoire de Géométrie sur les systèmes des forces, etc.*, inséré dans la *Correspondance mathématique et physique* de M. Quételet, tome VI, page 81-120, année 1830 *Voir* page 110.)

2°. Développer log $(1 + x)$ en série.

Physique et Chimie.

Théorie du pendule; phosphore; acide phosphorique; acide phosphoreux (préparation).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE; CONCOURS D'ADMISSION EN 1856

(voir t. XIV, p. 419).

COMPOSITIONS ÉCRITES (PARIS).

Mathématiques.

Discuter l'équation

$$\rho^2 = A + B \sin\omega + C \sin^2\omega$$

et faire la classification des diverses courbes qu'elle représente quand on considère ρ et ω comme des coordonnées polaires.

Calcul trigonométrique.

Sur la surface d'une sphère de rayon R on trace un petit cercle de rayon r; on divise la circonférence de ce petit cercle en trois parties proportionnelles aux nombres 1, 2, 3 et on joint les points de division A, B, C par des arcs de grand cercle.

Cela posé, on demande de calculer les côtés du triangle sphérique ABC en mètres, la surface en mètres carrés et les angles en degrés, minutes, secondes.

On prendra

$$R = 366198^{m},$$
$$r = \cos(48^\circ 50' 13'').$$

R est le rayon terrestre; r le rayon du parallèle de Paris.

Géométrie descriptive.

On donne un cylindre vertical dont la base sur le plan horizontal est un cercle.

On coupe ce cylindre par un plan perpendiculaire au plan vertical et incliné de 45 degrés sur le plan horizontal; on prend l'intersection pour base d'un nouveau cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de cette base. Enfin un point de cette nouvelle surface cylindrique est donné par sa projection horizontale. On demande de trouver la projection verticale et de mener par ce même point le plan tangent à la deuxième surface cylindrique.

N. B. Pour l'uniformité, on prendra les données comme il suit : le centre de la base du premier cylindre sera à 3 centimètres en avant de la ligne de terre et le rayon de cette base sera de 1 centimètre. Le plan par lequel on coupe ce cylindre et qui est incliné de 45 degrés par rapport au plan horizontal devra couper l'axe du cylindre à 4 centimètres au-dessus du plan horizontal, et la trace horizontale de ce plan sera placée à gauche de cet axe.

Enfin la projection horizontale du point par lequel on veut mener un plan tangent au second cylindre sera placée à 25 millimètres en avant de la ligne de terre et sa distance au centre du cercle sera de 15 millimètres.

Composition française.

Jeanne d'Arc à Orléans.

ÉCOLE DE SAINT-CYR.

CONCOURS D'ADMISSION EN 1856 (EXAMENS DE PARIS)

(voir t. XIV, p. 494);

Composition écrite.

Rentrée des troupes victorieuses de Crimée.

Mathématiques.

Calculer la hauteur SP d'une montagne au-dessus du plan horizontal qui passe en A.

$$AB = 2356^{m},70,$$
$$SAB = 63^{\circ}.19'.25'',$$
$$SBA = 48.35.42,$$
$$SAD = 43.19.50.$$

Thème allemand.

ÉCOLE IMPÉRIALE NAVALE.

CONCOURS D'ADMISSION EN 1856 (EXAMENS DE PARIS).

Composition écrite.

Narration : Les deux orphelins.

Calcul trigonométrique.

Résoudre un triangle, connaissant :

Le côté $a = 2856^{m},031$,
Le côté $b = 3246^{m},927$,
L'angle $c = 48^{\circ}\ 45'\ 2'',4$.

Version latine.

ÉCOLE IMPÉRIALE FORESTIÈRE.

CONCOURS D'ADMISSION EN 1856 (EXAMENS DE PARIS).

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Zoologie.

Description de l'appareil de la circulation chez les Mammifères.

Botanique.

Structure générale du fruit; caractère des cariopses, samares, gousses, capsules.

Minéralogie.

Caractères généraux du gypse.

Arithmétique.

Calcul des nombres décimaux; approximations à une unité décimale donnée; erreurs relatives correspondantes des données et des résultats.

Algèbre.

Partager une somme P en deux parties telles, que leur produit Q soit un maximum. Des maxima et minima de deuxième degré.

Applications.

Description du graphomètre; manière de mesurer les angles avec cet instrument, et des précautions qu'il faut prendre dans son maniement.

Trigométrie et calcul logarithmique.

L'angle A d'un triangle $= 40^{\circ}\ 56'$;

Les deux côtés comprenant l'angle sont :

$$b = 715^{m},77,$$
$$c = 878^{m},12.$$

Calculer les autres parties du triangle et sa surface.

Cosmographie.

Calendrier.

Version latine.

APPLICATIONS DIVERSES DES THÉORIES DE LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Construction des sections coniques déterminées par cinq conditions;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

---

1. *On donne cinq points* a, b, c, d, e.

Ire Solution. Les rayons *ac*, *ad*, *ae* et leurs homologues *bc*, *bd*, *be* appartiennent à deux faisceaux homographiques. Donc si l'on mène arbitrairement un rayon *af*, on connaîtra le rayon correspondant *bf*, et, par suite, le point *f*, intersection des deux rayons; on a donc un sixième point de la conique, etc.

Si l'on prend le rayon *ab* au lieu de *af*, son homologue *bt* dans le second faisceau sera la tangente en *b*, etc.

IIe Solution. abcd forme un quadrilatère inscrit dans la conique cherchée. Par le point *e*, on mènera une droite quelconque *ef* et l'on cherchera le point *f*, conjugué du point *e* dans l'involution déterminée sur cette droite par les points où elle rencontre les côtés opposés du quadrilatère. Ce point *f* appartiendra à la conique.

Si l'on veut trouver la tangente *bt* en *b*, on regardera

acbt comme un quadrilatère inscrit dont deux sommets sont infiniment voisins en *b* et la droite *ed* comme une transversale de ce quadrilatère. Cette transversale coupe les côtés opposés *ba*, *bc* en α, γ, la courbe en *e* et *d* et les cotés opposés *ac*, *bt* en δ et x. Ces six points formant une involution, on déterminera le point x, et, par suite, la tangente *bt*.

IIIe Solution. Par le point *e*, on mène une droite quelconque *ef* et l'on forme ainsi un hexagone inscrit *abcdef* dont le sixième sommet *f* est inconnu. Soit α le point de rencontre de *ab* et de *de*, β célui de *bc* et de *ef*; le côté *cd* coupe $\alpha\beta$ au point où aboutit sur cette droite le côté inconnu *af*, ce qui fixe le point *f* (théorème de Pascal).

Si l'on veut trouver la tangente en *b*, on regarde cette tangente comme le sixième côté d'un hexagone dont deux sommets se confondent en *b*. La tangente *bt* coupe le côté *ed* en un point γ qui est en ligne droite avec les points de concours α, β des côtés *ba* et *cd* avec les côtés opposés *ae* et *bc*; elle est ainsi déterminée.

On peut encore résoudre le problème en se servant du théorème de Carnot, etc.

2. *On donne cinq tangentes* A, B, C, D, E.

Ire Solution. Les tangentes C, D, E déterminent sur A et B deux divisions homographiques. On obtient donc une sixième tangente quelconque passant par un point pris sur A, en joignant ce point au point homologue de la division marquée sur B.

Si l'on prend pour ce point le point de concours (A, B) des deux tangentes A, B, on obtient immédiatement le point de contact de la courbe avec A ou B, suivant qu'on regarde ce point comme appartenant à B ou à A. On peut ainsi ramener la question à celle des cinq points.

IIe Solution. Quatre des tangentes données forment

un quadrilatère circonscrit. Qu'on prenne sur la cinquième un point quelconque *a* et qu'on le joigne aux quatre sommets du quadrilatère ; le sixième rayon, conjugué à la cinquième tangente dans l'involution que ces quatre droites déterminent, est une tangente issue du point *a*.

Supposons qu'on veuille trouver le point de contact *t* de la tangente B. On considère le quadrilatère formé par les tangentes A, C, B dont deux côtés se confondent en un seul suivant B, et dont (A, C), (A, B), (B, C) et *t* sont les quatre sommets. Le sommet *t* est inconnu, mais les six rayons qui aboutissent au point de concours I de D et E, savoir D, E, I (A, B), I (B, C), I (A, C), I*t* sont en involution, et cinq sont connus. Il sera donc facile de déterminer le sixième, et, par suite, le point cherché *t*.

IIIe Solution. On détermine aussi une sixième tangente quelconque au moyen du théorème de M. Brianchon.

Si l'on veut, au moyen du même théorème, trouver le point de contact *t* de la tangente B et que *abcde* soit le pentagone formé par les cinq tangentes données, on joindra *ad* et *be* qui se coupent en O ; la droite *c*O ira couper *ae*, c'est-à-dire B, au point cherché *t*.

Nota. Dans le cas de la parabole, la cinquième tangente est donnée implicitement ; c'est la droite à l'infini. Les quatre qui sont données forment un quadrilatère. Par les sommets de ce quadrilatère, on mènera quatre parallèles dans une direction arbitraire ; on les coupera par une transversale quelconque sur laquelle on cherchera le *point central* de l'involution qu'elles y déterminent, et la parallèle aux autres droites, menée par ce point, sera sur une cinquième tangente.

Cette construction dérive, sans difficulté, de la deuxième solution.

3. *On donne quatre points et une tangente.*

Il suffit de trouver un cinquième point, et la question sera ramenée à la première.

Ire Solution. Soient *abcd* le quadrilatère donné et *e* le point de contact inconnu de la tangente. Soient α, α' et β, β' les points où cette tangente rencontre respectivement les côtés opposés du quadrilatère. Ces points déterminent une involution dont *e* est un point double. Il sera donc facile à trouver. Mais on voit que la question a deux solutions.

Nota. Dans le cas de la parabole, la tangente est à l'infini. Soit S le point de concours des côtés opposés *ad*, *bc* du quadrilatère donné. Qu'on mène Sc' et Sd' parallèles respectivement aux deux autres côtés opposés. On a quatre rayons Sc', Sd', Sc, Sd issus du point S, qui, conjugués deux à deux, déterminent une involution. Chacun des deux rayons doubles de cette involution est parallèle à l'axe d'une parabole qui satisfait à la question.

Soit cX une parallèle à l'un de ces deux rayons doubles menée par le point *c* pour lequel on veut, par exemple, trouver la tangente *ct* à la parabole dont cX est un diamètre. Les deux faisceaux Xa, Xb, Xc, Xd (celui-ci formé de rayons parallèles) et *ca*, *cb*, *cd*, *ct* sont homographiques. Si l'on prend les points de concours inverses a', b' des rayons homologues, la droite $a'b'$ sera parallèle à la tangente en *c*, parce que les deux points a' et b' sont en ligne droite avec le point où la tangente *ct* rencontre la tangente en X, c'est-à-dire la droite située à l'infini.

IIe Solution. Soit *et* la tangente donnée dont le point de contact *e* est inconnu. On peut regarder la figure comme un hexagone dont les côtés opposés sont *ab*, *ed*; *be*; *dc*;

et, *ac*. Le point *t*, où la tangente donnée rencontre le côté *ac*, est connu. Soient α et β les points de concours de *ab* avec *de* et de *cd* avec *be* respectivement. Les points α, β, *t* sont en ligne droite, par la propriété de l'hexagone inscrit. Il s'agit donc de mener, par les deux points fixes *b* et *d*, deux rayons $b\beta$, $d\alpha$ qui se coupent en *e* sur la tangente donnée et tels, que les points α, β et *t* soient en ligne droite. Ces rayons sont évidemment deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques qui marquent sur les côtés *ab*, *cd*, respectivement deux séries de points pareillement homographiques. Si l'on joint le point *t* à ces points, on formera autour du sommet *t* deux faisceaux homographiques dont les *rayons doubles* fourniront l'un et l'autre une solution de la question proposée.

Nota. Dans le cas de la parabole, la tangente *et* est à l'infini, la construction reste d'ailleurs la même, et chaque rayon double est un diamètre d'une parabole qui satisfait à la question.

4. *On donne quatre tangentes et un point.*

Ire Solution. On détermine une cinquième tangente en cherchant les rayons doubles de l'involution qui est déterminée par les quatre rayons, conjugués deux à deux, qu'on obtient en joignant le point donné aux sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes données. Chacun des deux rayons doubles est une tangente à la conique; on a donc deux solutions distinctes.

Nota. Pour la parabole, on donne un point et trois tangentes, la quatrième est à l'infini. La solution est la même. Deux des rayons de l'involution sont parallèles respectivement à deux des tangentes données.

IIe Solution. La figure représente un hexagone circonscrit *abcdef*. Les côtés *ab*, *bc*, *ef*, *af* sont donnés de direction, ainsi que le point *d*. Il s'agit de mener par le

point *d* une droite *cde* qui rencontre les côtés indéfinis *bc* et *fe* en *c* et *e* respectivement et telle, que les droites *be* et *cf* se croisent en un point de la droite *ad*.

Or il est évident que si l'on fait pivoter la droite *ce* autour du point *d*, les points variables *c* et *e* marqueront sur *bc* et *fe* respectivement deux divisions homographiques. Les faisceaux formés par les rayons variables *be*, *fc* sont pareillement homographiques, et il en sera de même des deux divisions de points que ces rayons marquent sur la droite *ad*. Si l'on détermine les *points doubles* de ces deux divisions, chacun d'eux étant joint aux points *b* et *f*, fournira une solution de la question.

Nota. Dans le cas de la parabole où la tangente *fe*, par exemple, est tout entière à l'infini, voici à quoi se réduit la construction générale. On mène par le point donné *d* une droite quelconque qui coupe le côté indéfini *bc* au point γ. Par ce point, on mène parallèlement à *af* une droite qui coupe *ad* en α', et par le point *b*, parallèlement à $d\gamma$, une droite qui coupe *ad* en α. Les points α, α' appartiennent respectivement à deux divisions homographiques dont on cherche les points doubles ε, φ. La droite *dc*, parallèle à $b\varepsilon$, est tangente à l'une des deux paraboles qui satisfont aux conditions proposées. La droite *dc'*, parallèle à $b\varphi$, est tangente à la seconde.

5. *On donne trois points et deux tangentes.*

Soient *a*, *b*, *c* les trois points donnés, T, T' les deux tangentes qui se coupent au point O et qui touchent respectivement la courbe aux deux points *d*, *e* qu'il s'agit de déterminer.

On peut regarder la corde de contact *de* comme représentant un quadrilatère inscrit dont deux sommets sont infiniment voisins l'un de l'autre en *d*, tandis que les deux autres le sont pareillement en *e*. La corde *bc* étant considérée comme une transversale du quadrilatère et de la

courbe, fournit une relation d'involution, en vertu du théorème de Desargues, entre les six points où elle coupe les côtés opposés du quadrilatère et la courbe. Ces points se réduisent ici à cinq, savoir : t, t' sur les tangentes dO, eO respectivement; ε sur les deux autres côtés opposés qui se confondent en un seul de; et enfin b, c sur la courbe. Le point ε est donc un point double de l'involution déterminée par les segments bc, tt'.

Si l'on prend ab comme transversale au lieu de bc, on trouvera de même un point φ appartenant à la corde de contact de, qui se trouve ainsi déterminée par les deux points ε et φ. Mais comme chacune des deux relations d'involution fournit deux points doubles ε, ε' et φ, φ', on obtiendra quatre positions distinctes de la corde de, savoir $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon\varphi'$, $\varepsilon'\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$, c'est-à-dire quatre solutions différentes du problème proposé.

Nota. Dans le cas de la parabole où l'on ne donne qu'une tangente et trois points, on obtient de même quatre solutions. La tangente T' est à l'infini ainsi que le point t'; donc le point t qui lui est conjugué dans l'involution est le *point central* de cette involution dont on connaît en outre le segment bc et dont il s'agit de trouver les points doubles. Chacune des quatre cordes de contact $\varepsilon\varphi$ est un diamètre d'une parabole satisfaisant aux conditions proposées.

6. *On donne trois tangentes et deux points.*

Nous allons déterminer deux nouvelles tangentes à la courbe aux points donnés a, b. Soient AB, BC, CD celles qui sont données. Désignons par O le point de concours inconnu des deux tangentes cherchées; si l'on regarde l'angle bOa comme un quadrilatère circonscrit OaOb dont les côtés adjacents se sont confondus deux à deux en un seul Oa ou Ob, on verra tout de suite que la droite BO est un rayon double dans l'involution formée

par les deux couples de rayons conjugués Ba, Bb et BA, BC.

Pareillement, CO est un rayon double de l'involution Ca, Cb, CB, CD. Donc le point O, intersection des rayons BO et CO est déterminé. Mais comme chacune des deux involutions comporte deux tels rayons, on obtient quatre positions distinctes du point O, et, par conséquent, le problème admet, comme le précédent, quatre solutions.

Nota. S'il s'agit d'une parabole, l'une des trois tangentes données est à l'infini, BC par exemple. La construction reste la même en principe; mais ici les deux faisceaux de rayon en involution se composent de droites parallèles, puisque leurs sommets respectifs B et C sont à l'infini. Coupons-les par une transversale quelconque. On aura sur cette droite, relativement au premier faisceau, deux points α, β intersections des rayons conjugués aB, bB; un point ω, intersection du rayon AB dont le conjugué CB est à l'infini, ce qui est cause que ω est le *point central* de l'involution; enfin un point double x, intersection du rayon BX et qu'il s'agit de déterminer. Relativement au second faisceau, on aura de même deux points conjugués d'une involution α', β'; un point central ω', et l'on déterminera un point double y; les droites xO, yO, parallèles respectivement aux tangentes données AB, DC, se couperont au sommet O de l'angle circonscrit à l'arc ab de la parabole, et l'on aura encore quatre solutions, parce que l'on obtiendra deux positions du point x et deux positions du point y.

7. Quelques-unes des données peuvent être imaginaires. Sans entrer dans le détail des différents cas qui peuvent se présenter, supposons qu'on ait à faire passer une conique par quatre points imaginaires et un point réel a.

Le système des quatre points imaginaires peut être

donné au moyen de deux coniques (tracées ou seulement déterminées par cinq conditions) qui ne se coupent en aucuns points réels.

Dans ce cas, menons par le point donné a une transversale qui rencontre les deux coniques données en h, h', i, i' respectivement et la conique qu'on veut construire en a'. Les six points a, a', h, h', i, i' sont en involution; donc on déterminera facilement le point a', et, par suite, autant de points qu'on voudra de la conique cherchée.

L'une des coniques données peut être remplacée par le système de deux droites qui seront, par conséquent, les *axes de symptose* de la première et de celle qu'on a à construire. La construction demeure identiquement la même.

Enfin, on peut ne donner que deux droites L, L′ sur lesquelles doivent se trouver deux par deux les points imaginaires ε, φ, γ, θ. Mais alors il faut connaître en outre leurs points milieux ω, ψ et les rectangles de leurs distances à deux points fixes pris sur L et sur L′, ou, ce qui en est une conséquence, au point de rencontre m de ces deux droites. Ainsi l'on connaît $m\varepsilon.m\varphi$ et $m\gamma.m\theta$.

Par le point a, menons, parallèlement à L, une droite $aa'n$ qui coupe la conique cherchée en a' et L″ en n. On aura, en vertu du théorème de Newton (*Géométrie supérieure,* n° 480),

$$\frac{na'.na}{n\gamma.n\theta}=\frac{m\varepsilon.m\varphi}{m\gamma.m\theta},$$

équation qui fera connaître le point a'. Par ce point, on mènera une parallèle à L′ et l'on déterminera un autre point b, et ainsi de suite de proche en proche.

Remarque. Deux des points imaginaires peuvent être donnés à l'infini, soit sur une conique, soit sur un cercle. Dans le premier cas, la conique cherchée est *homothétique* à celle qui est donnée, et dans le second elle est un

cercle ayant pour axe radical avec le cercle donné la droite sur laquelle sont donnés les deux autres points imaginaires.

Etc.

CONSTRUCTION D'UNE MOYENNE PROPORTIONNELLE GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. EDM.-AUG. GOUZY (DE LAUSANNE).

Soient a et b les deux droites données. Sur une droite indéfinie XY portez à partir d'un point A une longueur $AB = b$ (la plus petite des droites données); sur la même droite, prenez une longueur ABC égale à a et la longueur BAD aussi égale à a; enfin des points C et D, comme centres, décrivez avec la même ouverture de compas des arcs de cercles se coupant en O; la droite $OA = OB$ sera la moyenne proportionnelle cherchée.

QUESTIONS.

363. Mener par un point P donné dans l'intérieur de l'angle A une droite BPC qui forme avec les côtés de l'angle un triangle ABC dont le périmètre soit un minimum.

364. Trouver sur le plan du triangle ABC un point o dont la position soit telle, que les circonférences passant par le point o et deux des sommets du triangle soient entre elles comme trois droites a, b, c données.

365. m étant un nombre entier positif, la valeur *en-*

tière et inférieure la plus approchée de $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$ est divisible par 2^{m+1}. Soit par exemple $m=1$,

$$(1+\sqrt{3})^3 = 10+6\sqrt{3} = 20,39\ldots;$$

20 est divisible par $2^{1+1}=4$; soit $m=2$,

$$(1+\sqrt{3})^5 = 76+44\sqrt{3} = 152,20\ldots;$$

152 est divisible par $2^{2+1}=8$. (J.-J. Sylvester.)

366. Sur une droite AB de *longueur donnée*, on décrit un segment capable d'un *angle donné*. L'extrémité A se meut sur une droite fixe M et l'extrémité B sur une droite fixe N situées l'une et l'autre dans le plan du segment. On demande de trouver : 1° le lieu d'un point *quelconque* du plan du segment, point fixe *relativement* au segment; 2° le lieu d'un point de la circonférence du segment; 3° l'enveloppe du cercle; 4° les mêmes lieux et la même enveloppe lorsque l'*angle donné* est égal à l'angle des deux droites M et N. (De la Gournerie.)

367. Les côtés d'un angle droit inscrit dans une circonférence de cercle interceptent une demi-circonférence et sous-tendent deux arcs supplémentaires; on mène à chacun de ces trois arcs une tangente telle, que le point de contact soit au milieu de la portion de tangente interceptée entre les côtés de l'angle suffisamment prolongés. Démontrer que les trois points de contact sont les sommets d'un triangle équilatéral.

(Sir Frederick Pollock, F. R. S., lord chief baron of the Court of Exchequer.)

368. p, q, r sont trois fonctions entières linéaires en x et y; $p=0$, $q=0$, $r=0$ sont les équations respectives des côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC; $p-q=0$, $q-r=0$, $r-p=0$ sont donc les équations de trois droites passant respectivement par les sommets B, C, A,

et se rencontrant au même point D; soient α, β, γ les points où AD rencontre BC, où BD rencontre CA, où CD rencontre AB. Trouver en fonction de p, q, r l'équation de la conique qui touche les côtés du triangle en α, β, γ. (ARTHUR CAYLEY.)

369. Mêmes données que dans la question précédente. Il s'agit de mener deux droites R, S rencontrant AB aux points r_1, s_1, BC aux points r_2, s_2, CA aux points r_3, s_3, de telle sorte que les trois systèmes de cinq points r_1, s_1, A, γ, B; r_2, s_2, B, α, C; r_3, s_3, C, β, A soient en involution, α, β, γ étant des points *doubles*. Trouver en fonction de p, q, r les équations des droites R, S.

(ARTHUR CAYLEY.)

370. Soit le déterminant à n^2 termes

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \ldots, & a_{2n}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \ldots, & a_{3n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, \ldots, & a_{nn}, \end{matrix}$$

a_{pq} et a_{qp} sont deux nombres imaginaires conjugués, de sorte que a_{pp} est un nombre réel. Démontrer que le déterminant est réel.

371. Déterminer dans le plan d'un triangle un point tel, qu'en multipliant chaque distance de ce point à un sommet par le sinus de l'angle formé par les deux distances aux deux autres sommets, la somme de trois produits soit un maximum. Démontrer que le centre du cercle inscrit remplit cette condition.

CORRECTION DANS LES TABLES DE CALLET DE 1840, DE VEGA DE 1794 ET DE URSINUS DE 1827.

CALLET, 1840 (*).

	Lisez :	Au lieu de :
log sin 1°.47′.54″	8,496 6763	8,496 9763
log sin 4.38. 1	8,907 3235	8,907 3245
log cot 13.30.50	0,619 1827	9,619 1827
log cot 42.25. 0	0,039 2158	0,039 2258

VEGA, 1794.

	Lisez :	Au lieu de :
log cot 9° 5′ 50″	10,79554 26908	10,79554 27008

URSINUS, 1827.

	Lisez :	Au lieu de :
log 96° 3′ 48″	983843	983943

Ces corrections sont indiquées par M. Luther (*Astr. Nachr.* t. XLIV, p. 239, 1856, n° 1047).

Ces Tables d'Ursinus sont les suivantes :

Ursinus G.-F. *Logarithmi sex decimalium, scilicet numerorum ab* 1 *ad* 100 000, *et sinuum et tangentium ad* 10″, *quibus additi sunt varii logarithmi et numeri sæpius in mathesi adhibiti.* Grand in-8, Copenhague, 1828.

Les logarithmes sans colonnes de différences; mais au dessus de chaque colonne, il y a des nombres auxiliaires qui servent à trouver les sinus et tangentes des angles moindres que 20° 46′ 40″. Il y a une édition danoise de 1847.

(*) Ces fautes n'existent pas dans l'édition de 1795. Comment se sont-elles produites dans l'édition de 1840, les deux éditions étant stéréotypes?

SOCIÉTÉ DE SECOURS DES AMIS DES SCIENCES.

L'esprit d'abstraction qui crée la théorie crée rarement la fortune; aussi rencontre-t-on malheureusement trop souvent, luttant contre la misère, des hommes, des familles dont les noms rappellent d'honorables souvenirs et se rattachent à des spéculations scientifiques généralement admises, à des inventions devenues usuelles, à des observations fondamentales. Une Société s'est établie pour faire disparaître, autant que possible, cette déplorable anomalie sociale, et pour limiter au moins de douloureux besoins. L'institution est l'œuvre du vénérable baron Thenard, qui veut couronner une carrière depuis si longtemps illustre, en acquérant un nouveau titre au respect de la postérité. Faisant des vœux pour la réussite, nous associant au succès de la noble entreprise, proclamant ses statuts, nous restons fidèles au but de notre recueil uniquement établi dans l'intérêt de la science, intérêt qui exige impérieusement que l'on vienne en aide à ceux qui la cultivent ou qui l'ont cultivée avec désintéressement.

Dans une séance d'inauguration tenue le 5 mars dernier, présidée par l'illustre fondateur, on a arrêté les statuts préliminaires en dix articles, dont voici les principaux, suffisants pour donner idée de l'ensemble.

ARTICLE Ier. Pour faire partie de la Société, il faut être présenté par l'un de ses membres.

ARTICLE III. La souscription annuelle est de DIX FRANCS.

Indépendamment des souscriptions annuelles, la So-

ciété reçoit avec reconnaissance les dons qui lui sont faits (*).

Les fonds, produit des souscriptions et des dons, sont placés en rentes sur l'État, ou en actions de la Banque de France, ou en immeubles, par les soins du Conseil.

Article V. Les conditions nécessaires pour avoir *droit* à des secours sont :

1°. D'être Français ou étranger naturalisé;

2°. D'être auteur, soit d'un Mémoire ou travail jugé par l'Académie des Sciences digne d'être imprimé parmi ceux des *Savants étrangers,* soit, au moins, d'un Mémoire ou d'un travail approuvé par elle;

3°. D'avoir des besoins réels.

Celui qui, à l'avenir, remplira ces trois conditions aura droit à un secours annuel.

Ce même droit appartiendra à ses père et mère, à sa veuve et à ses enfants, pourvu qu'à l'époque de sa mort ils aient des besoins réels.

Article VII. Le Conseil, sur le Rapport d'une Commission de cinq de ses membres, décide, dans le courant de chaque année, s'il y a lieu d'accorder des secours, quelles sont les personnes qui y ont *droit* d'après l'article V, et quelle somme doit leur être accordée.

La Société est administrée par un Conseil de trente-six membres pris dans de hautes notabilités scientifiques et industrielles.

Dans la première séance ont été nommés, pour former le Bureau :

Président.......	M. le baron Thenard.	
Vice-Présidents..	MM. Dumas Flourens	de l'Institut.
Secrétaire.......	M. de Senarmont, de l'Institut.	

(*) Le fondateur offre un don de *vingt mille francs.*

Vice-Secrétaires. . MM. Barreswil, de la Société d'Encouragement.
F. Boudet, de l'Académie de Médecine.

Censeurs...... MM. F. Delessert, Bon Seguier, Mal Vaillant, de l'Institut.

Trésorier....... M. Paul Seguin, ingénieur civil, banquier.

Et vingt-six *Conseillers d'administration*.

Le nombre des souscripteurs au 5 mars dépassait 450.

NOTE SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX VOLUMES;

PAR M. CH. LOMBARD,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Licencié ès Sciences physiques et mathématiques.

Considérons un solide compris entre deux plans parallèles au plan des yz; appelons H la distance de ces deux plans; B, B′ et b, respectivement, les surfaces des sections extrêmes et celle de la section parallèle et équidistante. Le volume de ce solide aura pour expression

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4b),$$

pourvu que la surface S d'une section quelconque parallèle au plan des yz soit une fonction rationnelle de l'abscisse de cette section, fonction de la forme

$$S = a + bx + cx^2 + ex^3 \text{ (*)}.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 241.

(Le théorème ne serait plus vrai, si la fonction était d'un degré supérieur au troisième.)

Nous pouvons, sans changer cette condition, supposer l'origine au milieu de la distance H, puisque les formules de transformation des coordonnées étant entières, rationnelles et du premier degré, S ne cessera pas d'être rationnelle et son degré ne sera pas élevé. En posant $H = 2h$, on aura pour l'expression du volume

$$V = \int_{-h}^{+h} (a + ba + cx^2 + ex^3)\, dx = 2x\, h + \frac{2ch^3}{3}.$$

D'un autre côté, on obtiendra les sections B, B′ et b en faisant dans l'expression de S successivement

$$x = -h, \quad x = +h, \quad x = 0.$$

On a ainsi

$$B = a - bh + ch^2 - eh^3,$$
$$B' = a + bh + ch^2 + eh^3,$$
$$b = a.$$

En éliminant a, b, c, e entre ces trois équations et l'expression de V, on obtient la formule énoncée plus haut.

Cette élimination se fait facilement en ajoutant quatre fois la dernière équation aux deux précédentes; on a ainsi

$$B + B' + 4b = ba + 2ch^2 = \left(2ah + \frac{2ch^3}{3}\right)\frac{3}{h} = \frac{3V}{h},$$

d'où on tire

$$V = \frac{h}{3}(B + B' + 4b):$$

et comme $h = \frac{H}{2}$, on a, en substituant,

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4b).$$

Cette formule, due à M. Sarrus, s'applique aux pris-

mes et cylindres, aux cônes, pyramides et aux troncs de cônes et de pyramides, à la sphère, aux ellipsoïdes, ainsi qu'aux segments de sphères ou d'ellipsoïdes, etc.

Si l'on suppose, en effet, les bases du cylindre ou prisme parallèles au plan des yz, la section S sera, dans ce cas, une constante, et la condition analytique nécessaire et suffisante pour l'application de la formule se trouve remplie : il est clair, en effet, que pour les prismes et cylindres, les trois sections B, B′ et b sont égales et l'expression de V devient $\frac{H}{6} \times 6B$ ou $H \times B$.

Il en est de même pour les cônes et les pyramides. Si l'on suppose l'origine au sommet et le plan de la base parallèle au plan des yz, l'expression de S sera $\frac{Bx^2}{H^2}$, qui est encore une fonction rationnelle. La formule est donc applicable aux cônes, aux pyramides et à leurs troncs.

On le vérifie aisément en remarquant que dans le premier cas $B' = 0$, B est la base de la pyramide, b est le quart de B. L'expression de V devient donc $\frac{H}{6} \cdot 2B$ ou $\frac{B \times H}{3}$.

Si l'on voulait la vérifier pour le tronc, il faudrait évaluer b en fonction de B et de B′ et substituer cette valeur dans l'expression de V : on retomberait ainsi sur la formule connue du tronc de pyramide.

Pour cela, appelons x, y, z les côtés homologues des trois sections semblables B, B′, b; on aura

$$\frac{B}{x^2} = \frac{B'}{y^2} = \frac{b}{z^2}$$

ou

$$\frac{\sqrt{B}}{x} = \frac{\sqrt{B'}}{y} = \frac{\sqrt{b}}{z}.$$

Or

$$z = \frac{x + y}{2};$$

donc

$$\sqrt{b} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}{2}:$$

d'où l'on tire

$$4b = B + B' + 2\sqrt{BB'}.$$

En substituant dans l'expression de V, on trouve

$$V = \frac{H}{6}\left(2B + 2B' + 2\sqrt{BB'}\right) = \frac{H}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right),$$

ce qui est la formule connue.

Enfin le théorème s'applique encore à la sphère, aux ellipsoïdes et à leurs segments. En effet, l'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

l'expression de S sera

$$\pi\beta\gamma\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right),$$

expression rationnelle.

On peut le vérifier, en remarquant que, dans ce cas,

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad b = \pi\beta\gamma \quad \text{et} \quad H = 2\alpha,$$

par suite, V devient

$$\frac{2\alpha}{6} 4\pi\beta\gamma \quad \text{ou} \quad \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma;$$

de même pour la sphère.

On déduit aisément de ce théorème une démonstration d'une formule de Simpson fréquemment employée pour le cubage des travaux de terrassement.

On partage le volume à mesurer en un nombre pair $2n$ de tranches au moyen de $2n+1$ plans parallèles et équidistants. Représentons par

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ldots,\ S_{2n+1}$$

les surfaces des sections ainsi obtenues. Appelons h la distance constante de l'une d'elles à la suivante. Regardons comme des troncs de pyramides les volumes compris entre S_1 et S_3, entre S_3 et S_5, entre S_5 et S_7, etc., entre S_{2n-1} et S_{2n+1}. En appliquant à ces troncs successifs la formule que nous venons de démontrer, et remarquant que h n'est que la moitié de la hauteur de chacun de ces troncs, on aura

$$\text{Volume entre } S_1 \text{ et } S_3 = \frac{h}{3}(S_1 + S_3 + 4S_2),$$

$$\text{Volume entre } S_3 \text{ et } S_5 = \frac{h}{3}(S_3 + S_5 + 4S_4),$$

$$\text{Volume entre } S_5 \text{ et } S_7 = \frac{h}{3}(S_5 + S_7 + 4S_6),$$

. . . .

$$\text{Volume entre } S_{2n-1} \text{ et } S_{2n+1} = \frac{h}{3}(S_{2n-1} + S_{2n+1} + 4S_{2n}),$$

et, en ajoutant, on trouve, pour le volume total,

$$V = \frac{h}{3}\begin{pmatrix} S_1 + 4S_2 + 2S_3 + 4S_4 + 2S_5 + 4S_6 + \ldots \\ + 2S_{2n-1} + 4S_{2n} + S_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, le volume total est égal au tiers de l'équidistance multiplié par la somme des sections extrêmes, augmentée de deux fois la somme des autres sections de rang impair et de quatre fois la somme des sections de rang pair.

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES CURIEUX D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. ALEXANDRE ALLEGRET,
Professeur à Paris.

On trouve dans le premier livre de l'*Arithmétique* de Diophante quelques énoncés de problèmes susceptibles d'une grande extension et qui, modifiés légèrement, conduisent à d'autres problèmes linéaires que la sagacité de Leonardo Pisano (*voir* le *Bulletin*, 1855-56) s'est appliquée à résoudre. Je m'occuperai spécialement dans cet article des propositions XXV, XXVI, XXVII et XXVIII, Dioph., liv. Ier, qui rentrent comme cas particuliers dans les deux problèmes d'arithmétique suivants.

Problème I. On range un certain nombre de personnes en cercle, et on donne à chacune une certaine somme dont elle est chargée de remettre une fraction déterminée d'avance à la personne qui se trouve placée à sa droite. Chaque personne reçoit alors de la main gauche une somme, en même temps qu'elle en remet une autre de la main droite. On demande de déterminer quelle somme il faudrait donner primitivement à chacune de ces personnes pour qu'après tous les échanges effectués comme il vient d'être dit, elles se trouvent toutes en possession d'une même somme.

Solution. Ce problème est susceptible d'une solution uniforme, indépendante du nombre des personnes qui entrent dans l'énoncé. Pour fixer les idées, je me bornerai à traiter le cas où il s'agit de cinq personnes; on verra facilement que la méthode est générale.

Soient

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5$$

les cinq fractions données d'avance, et posons, pour plus de simplicité,

$$b_1 = \frac{1}{a_1+1},\quad b_2 = \frac{1}{a_2+1},\quad b_3 = \frac{1}{a_3+1},$$

$$b_4 = \frac{1}{a_4+1},\quad b_5 = \frac{1}{a_5+1},$$

ou

$$a_1 = \frac{1-b_1}{b_1},\quad a_2 = \frac{1-b_2}{b_2},\quad a_3 = \frac{1-b_3}{b_3},$$

$$a_4 = \frac{1-b_4}{b_4},\quad a_5 = \frac{1-b_5}{b_5};$$

on aura, d'après les conditions du problème, cette suite d'équations

$$x_5 + a_1x_1 = x_1 + a_2x_2 = x_2 + a_3x_3 = x_3 + a_4x_4 = x_4 + a_5x_5,$$

les cinq inconnues de la question étant représentées par

$$\frac{x_1}{b_1},\quad \frac{x_2}{b_2},\quad \frac{x_3}{b_3},\quad \frac{x_4}{b_4},\quad \frac{x_5}{b_5},$$

et x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 étant cinq autres inconnues auxiliaires qu'il s'agit de déterminer.

Remarquons que, comme il ne peut être question que de la recherche du rapport de ces diverses inconnues, on pourra poser

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}$$

Pour toute autre inconnue, x_3 par exemple, on aura

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_2 \end{vmatrix}$$

et plus généralement, i ou son résidu suivant le module 5 désignant l'un quelconque des indices 1, 2, 3, 4 ou 5, on aura

$$x_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_{i+4} \end{vmatrix} = a_{i+1}\,a_{i+2}\,a_{i+3}\,a_{i+4} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Faisant passer la dernière ligne du dernier déterminant à la première place, ce qui revient à multiplier le déterminant par $(-1)^3$, on aura

$$x_i = a_{i+1}\,a_{i+2}\,a_{i+3}\,a_{i+4} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} \end{vmatrix}$$

Or ce déterminant est susceptible d'une réduction analogue à la précédente et on est ainsi conduit à la formule suivante d'une remarquable simplicité :

$$\frac{1}{b_i}x_i = \frac{1}{b_i}\left(\begin{array}{l} a_{i+1}\,a_{i+2}\,a_{i+3}\,a_{i+4} - a_{i+1}\,a_{i+2}\,a_{i+3} \\ + a_{i+1}\,a_{i+2} - a_{i+1} + 1 \end{array}\right).$$

Application. Supposons qu'on donne

$$b_1 = \frac{1}{2},\quad b_2 = \frac{1}{3},\quad b_3 = \frac{1}{4},\quad b_4 = \frac{1}{5},\quad b_5 - \frac{1}{6},$$

on aura

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 5$$

et

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2.3.4.5 - 2.3.4 + 2.3 - 2 + 1 = 101,\\
x_2 &= 3.4.5.1 - 3.4.5 + 3.5 - 3 + 1 = 10,\\
x_3 &= 4.5.1.2 - 4.5.1 + 4.4 - 4 + 1 = 37,\\
x_4 &= 5.1.2.3 - 5.1.2 + 5.1 - 5 + 1 = 21,\\
x_5 &= 1.2.3.4 - 1.2.3 + 1.2 - 1 + 1 = 20.
\end{aligned}$$

Les cinq inconnues seront donc proportionnelles aux cinq nombres suivants :

$$202, \quad 30, \quad 148, \quad 105 \quad \text{et} \quad 120,$$

ce qu'on peut vérifier immédiatement.

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 334 (MANNHEIM);

PAR M. ABEL RAINBEAUX

ET M. A. SAINTARD,

Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Lionnet).

Etant donnés un triangle ABC et un point quelconque O dans l'intérieur de ce triangle, on mène les transversales AOa, BOb, COc; on a l'identité

$$\frac{1}{AOb} + \frac{1}{BOc} + \frac{1}{COa} = \frac{1}{AOc} + \frac{1}{BOa} + \frac{1}{COb}.$$

On a (*voir* page 22)

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{AOB} + \frac{1}{AOb} = \frac{1}{AOc} + \frac{1}{AOC},$$

$$(\beta) \qquad \frac{1}{BOC} + \frac{1}{BOc} = \frac{1}{BOa} + \frac{1}{AOB},$$

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{AOC} + \frac{1}{COa} = \frac{1}{COb} + \frac{1}{BOC}.$$

Ajoutant membre à membre (α) et (β), on a

$$(\delta)\qquad \frac{1}{\mathrm{BOC}}+\frac{1}{\mathrm{AO}b}+\frac{1}{\mathrm{BO}c}=\frac{1}{\mathrm{AO}c}+\frac{1}{\mathrm{BO}a}+\frac{1}{\mathrm{AOC}}.$$

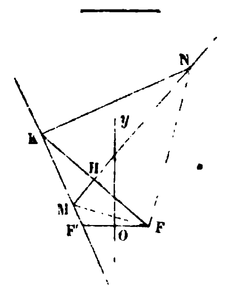
En ajoutant membre à membre (δ) et (γ), on a enfin

$$\frac{1}{\mathrm{AO}b}+\frac{1}{\mathrm{BO}c}+\frac{1}{\mathrm{CO}a}=\frac{1}{\mathrm{AO}c}+\frac{1}{\mathrm{BO}a}+\frac{1}{\mathrm{CO}b}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 358 (FAURE)

(voir t. XVI, p. 58);

PAR M. L. BOURDELLES,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).



1°. Soit M le point de rencontre de la sécante arbitraire F′K avec une des coniques; je mène par ce point la tangente MN à cette conique: je dis que cette droite sera tangente à la parabole ayant pour foyer le point F et pour directrice la sécante F′K.

En effet, j'abaisse du foyer F une perpendiculaire à cette tangente. Soient K le point où elle rencontre la sécante et H le point où elle coupe la tangente; si je joins M, F, le triangle KMF est isocèle, car la droite MH, tangente à la conique au point M, est bissectrice de l'angle KMF. Il en résulte que le point H est le milieu de KF, et, par suite, que MN est tangente à la parabole considérée.

La même démonstration s'applique à toutes les coniques homofocales ; par conséquent, si l'on mène des tangentes à toutes ces courbes par les points où la sécante les rencontre, la courbe enveloppe de ces tangentes sera une parabole.

2°. Il est évident que cette parabole est tangente à l'axe Oy des coniques qui contient les foyers imaginaires, car il est perpendiculaire sur FF′ et en son milieu O.

3°. Toute tangente commune à une conique et à la parabole est vue du foyer sous un angle droit.

En effet, je considère la tangente menée par le point M; soit N le point où elle touche la parabole. Si du point N j'abaisse une perpendiculaire NK sur la directrice, je forme un triangle NKM, rectangle en K, qui est égal au triangle MFN; donc l'angle MFN sous lequel on voit la tangente MN du foyer F est aussi droit. C. Q. F. D.

Note. MM. E. Carénon et E. Laguières, élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie), ont résolu la question de la même manière. M. Abel Rainbeaux donne une solution analytique. M. Rassicod, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), ramène ingénieusement la proposition à celle-ci : Du foyer F′ comme centre et du grand axe comme rayon, on décrit le cercle *directeur,* on prolonge le rayon vecteur quelconque F′P jusqu'à ce qu'il rencontre le cercle directeur en Q; par le point Q, on mène une tangente au cercle, et par le point P une tangente à l'ellipse. Le lieu d'intersection E de deux tangentes est une parabole. La connexion de ce résultat avec celui dont il s'agit est évidente. En faisant varier la droite arbitraire, le point E décrit la directrice de l'ellipse relative au foyer F.

Note. MM. Sylvestre et Boyeldieu, élèves de M. Catalan, et M. Poupelet, de l'institution Reusse, ont adressé les mêmes solutions.

Ajoutant membre à membre (α) et (β), on a

$$(\delta)\qquad \frac{1}{\text{BOC}}+\frac{1}{\text{AO}b}+\frac{1}{\text{BO}c}=\frac{1}{\text{AO}c}+\frac{1}{\text{BO}a}+\frac{1}{\text{AOC}}.$$

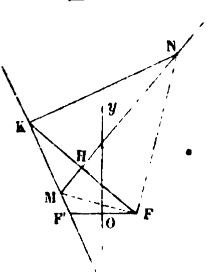
En ajoutant membre à membre (δ) et (γ), on a enfin

$$\frac{1}{\text{AO}b}+\frac{1}{\text{BO}c}+\frac{1}{\text{CO}a}=\frac{1}{\text{AO}c}+\frac{1}{\text{BO}a}+\frac{1}{\text{CO}b}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 358 (FAURE)

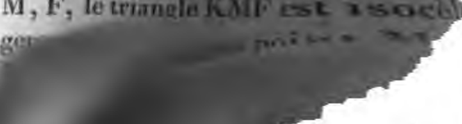
(voir t. XVI, p. 58);

PAR M. L. BOURDELLES,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).



1°. Soit M le point de rencontre de la sécante arbitraire F′K avec une des coniques; je mène par ce point la tangente MN à cette conique: je dis que cette droite sera tangente à la parabole ayant pour foyer le point F et pour directrice la sécante F′K.

En effet, j'abaisse du foyer F une perpendiculaire sur cette tangente. Soient K le point où elle rencontre la sécante et H le point où elle coupe ... si je joins ... MH, ... M, F, le triangle KMF est isocèle ...



La même démonstration s'a. . . –
ques homofocales ; par conséquent . -
gentes à toutes ces courbes par le . . .
les rencontre, la courbe enveloppe . . . -
une parabole.

2°. Il est évident que cette para . . .
l'axe Oy des coniques qui contient le . . .
car il est perpendiculaire sur FF . . .

3°. Toute tangente commune à une . . .
rabole est vue du foyer sous un an . . .

En effet, je considère la tangente . . .
M; soit N le point où elle touche . . .
N j'abaisse une perpendiculaire . . .
forme un triangle NKM, rectangle . . .
triangle MFN; donc l'angle MF . . .
tangente MN du foyer F est aussi.

Note. MM. E. Carénon et L . . .
lycée Saint-Louis (classe de M . . .
question de la même manière . . .
une solution analytique. M. I . . .
Saint-Louis (classe de M. Br . . .
ment la proposition à celle . . .
et du grand axe comme rayon . . .
teur, on prolonge le rayon . . .
qu'à ce qu'il rencontre le . . .
point Q, on mène une . . .
point P une tangente à l . . . s
de deux tangentes est . . . is
résultat avec celui de . . . rs
varier la droite arbi . . . n-
de l'ellipse relativ . . .

Not . . . *le*
. . . *tes*

THÉORÈME SUR LE TRIANGLE SPHÉRIQUE ;

PAR M. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Théorème. ABC triangle sphérique; O centre de la sphère, V_1 volume du parallélipipède qui a pour arêtes OA′, OB′, OC′; A′, B′, C′ sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a

$$V_1 = \sin\frac{1}{2}S.$$

(CORNELIUS KEOGH.)

Démonstration. En désignant par a', b', c' les côtés du triangle A′, B′, C′, on a

$$\cos c' = \frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{a}a\sin\frac{1}{2}b\cos C,$$

ou, en substituant les expressions connues de $\cos\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}a$, etc., en fonction des angles,

$$\cos c' = \cos\frac{1}{2}S\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{1}{2}S\right)\sin\left(B-\frac{1}{2}S\right)}{\sin A\sin B}},\ldots$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}V_1^2 &= \sin^2 b'\sin^2 c'\sin^2 A'\\ &= 1-\cos^2 a'-\cos^2 b'-\cos^2 c'+2\cos a'\cos b'\cos c',\end{aligned}$$

et en substituant les expressions précédentes de $\cos c'$, $\cos b'$, $\cos a'$, il vient, après quelques transformations faciles,

$$V_1^2 = 1-\cos^2\frac{1}{2}S$$

ou

$$V_1 = \sin\frac{1}{2}S.$$

PROGRAMME D'UNE NOUVELLE THÉORIE DE LA MESURE DES PRISMES;

PAR M. DIEU,
Professeur à la Faculté de Grenoble.

THÉORÈME I. *La mesure d'un parallélipipède rectangle droit est le produit de sa base par sa hauteur.*

(Démonstration par la décomposition en cubes.)

Corollaire I. Cette mesure s'étend :

1°. Au parallélipipède droit.

(Equivalent au parallélipipède rectangle de base équivalente et de même hauteur, construit en formant, de la manière bien connue, des rectangles sur les bases parallélogrammes : on a une partie commune et des parties évidemment superposables.)

2°. Au prisme triangulaire droit.

(Moitié du parallélipipède droit de base double et de même hauteur.)

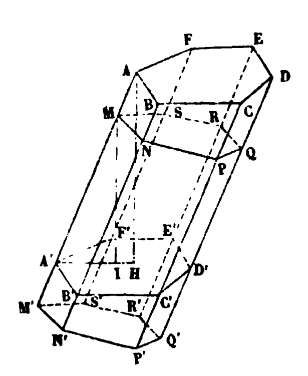
3°. Au prisme polygonal droit.

(Somme de prismes triangulaires.)

Remarques. Deux prismes droits de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents. Deux prismes droits de bases équivalentes sont proportionnels à leurs hauteurs et deux prismes droits de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.

THÉORÈME II. *La mesure d'un prisme oblique est le produit de la section droite par la longueur des arêtes latérales.*

Remarque. S'il s'agit d'un parallélipipède, il faut dire : Le produit d'une section droite par la longueur des arêtes perpendiculaires à cette section.



(AD′ étant le prisme oblique, MNP... une section droite et MQ′ le prisme droit construit sur MNP... dont la hauteur MM′ = AA′. On prouve facilement que ce prisme droit est équivalent au prisme oblique, partie commune MD′ et parties superposables MD, M′D′. Pour établir la superposition de ces dernières parties, il est bon de remarquer que les angles trièdres [M, M′], [N, N′], etc., sont égaux deux à deux, faces égales chacune à chacune.)

Remarques. Deux prismes obliques sont équivalents lorsque leurs sections droites sont équivalentes et leurs arêtes latérales égales. Ils sont proportionnels à leurs arêtes latérales, si les sections droites sont équivalentes, et à leurs sections droites si les arêtes latérales sont égales.

Théorème III. *La mesure d'un prisme oblique quelconque est le produit de sa base par sa hauteur.*

Démonstration. Soient A′D le prisme, MNP... une section droite, MI et AH deux perpendiculaires aux bases du prisme. Désignons par B l'aire de ces bases, par S celle

des sections droites, par h la hauteur AH, enfin par A la longueur des arêtes AA'....

D'après un théorème connu, en remarquant que la section droite MNP... est sur son plan, la projection de la base A'B'C'..., on a

$$\frac{S}{B} = \frac{MI}{MA'}.$$

Mais les triangles semblables MA'I, AA'H donnent

$$\frac{MI}{MA'} = \frac{AH}{AA'} = \frac{h}{a};$$

donc

$$\frac{S}{B} = \frac{h}{a},$$

d'où

$$Bh = Sa = \text{volume prisme (théor. précédent)}.$$

Remarques. Deux prismes quelconques de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents. Deux prismes quelconques de bases équivalentes sont proportionnels à leurs hauteurs, et deux prismes quelconques de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.

THÉORÈME SUR LES RACINES COMMENSURABLES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. EMILE MATHIEU,

Professeur.

Soit l'équation algébrique à coefficients *entiers*

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Hx + L = 0.$$

1°. L'équation n'a pas de racines commensurables, si, A et L étant impairs, l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ est aussi impair.

2°. L'équation n'a pas non plus de racines commensurables, si, des quatre nombres A, L, $f(1)$ et $f(-1)$, aucun n'est divisible par 3.

Démonstration. En effet, soit $\frac{a}{b}$ une racine fractionnaire irréductible de cette équation; on aura

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{b}\right)\varphi(x)$$

ou

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{b}\right)\left|\begin{array}{l|l|l} \mathrm{A}x^{m} + \frac{\mathrm{A}a}{b} & x^{m-1} + \frac{\mathrm{A}a^2}{b^2} & x^{m-2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}a^{m-1}}{b^{m-1}} \\ \quad + \mathrm{B} & \quad + \frac{\mathrm{B}a}{b} & \quad + \frac{\mathrm{B}a^{m-2}}{b^{m-2}} \\ & \quad + \mathrm{C} & \quad + \ldots\ldots \\ & & \quad + \mathrm{H} \end{array}\right|$$

Posons

$$\varphi(x)=\frac{\psi(x)}{b^{m-1}},$$

$\psi(x)$ étant un polynôme algébrique dont les coefficients sont *entiers*; donc

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{b}\right)\frac{\psi(x)}{b^{m-1}}.$$

Soit α un nombre entier; on obtient l'identité

$$f(\alpha)=\frac{(b\alpha-a)\psi(\alpha)}{b^{m}}$$

et

$$\psi(\alpha)=\frac{b^{m}f(\alpha)}{b\alpha-a}.$$

Or si un nombre premier p divise b^{m}, il divise b, il est

donc premier avec a; donc il n'y a pas de facteur commun à b^m et à $b\alpha - a$; il faut donc que $\frac{f(\alpha)}{b\alpha - a}$ soit un nombre entier, quel que soit α.

Faisons-y successivement

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = -1,$$

et alors

$$\frac{L}{a}, \quad \frac{f(1)}{b-a}, \quad \frac{f(-1)}{b+a}$$

sont *entiers*.

Or $\frac{b}{a}$ est racine de l'équation inverse

$$Lx^m + Hx^{m-1} + \ldots + B'x + A = 0;$$

donc, par la même raison que $\frac{L}{a}$ est entier, $\frac{A}{b}$ sera aussi entier, dans l'équation inverse.

D'après cela, si A et L, multiples respectifs de b et a, sont impairs, a et b sont aussi impairs; donc $b - a$ et $b + a$ sont pairs et $f(1)$ et $f(-1)$ sont pairs.

Donc si A et L sont impairs et que l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ soit aussi impair, l'équation ne peut avoir de racines fractionnaires; le raisonnement reste le même lorsque $b = 1$: donc l'équation n'a pas de racines commensurables; dans ce cas, le théorème rentre dans le cas examiné (*Nouvelles Annales*, t. XV, p. 449).

Supposons, en second lieu, que A et L ne soient pas divisibles par 3, a et b ne le seront pas non plus; on aura

$$a = 3p \pm 1, \quad b = 3q \pm 1,$$

et il est facile de voir que l'un des nombres $a - b$ et $a + b$ sera divisible par 3; donc l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ sera nécessairement divisible par 3.

Donc l'équation n'a pas de racines commensurables, si

des quatre nombres A, L, $f(1)$ et $f(-1)$ aucun n'est divisible par 3.

Corollaire. Toute équation d'un nombre impair de termes dont tous les coefficients sont impairs n'a aucune racine commensurable.

Observation. Si le terme tout connu manque, il y a des racines nulles.

SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ,

Plans polaires, Construction d'une surface du troisième degré;

PAR M. POUDRA.

Proposition I. Lorsque plusieurs surfaces du deuxième degré passent par huit points communs, les plans polaires d'un neuvième point M pris par rapport à ces surfaces passent par une même droite.

Démonstration. En effet, toutes ces surfaces ont en commun une courbe du quatrième ordre; donc si par le point M on mène un plan quelconque, il coupera les surfaces du deuxième degré suivant des coniques qui auront quatre points communs : les polaires du point M, relatif à ces coniques, passeront donc par un même point N qui sera ainsi dans tous les plans polaires. Il en sera de même pour tout autre plan mené par M; donc tous ces points N devant se trouver en même temps dans tous les plans polaires de ce point M, il en résulte qu'il faut que tous ces plans passent par une même droite.

Corollaire I. Si le point M est un des points communs à toutes les surfaces, les plans polaires de ce point seront les plans tangents aux surfaces en ce point. Donc tous les plans tangents à une série de surfaces du deuxième degré ayant en commun une même courbe du quatrième ordre

en un point de cette courbe passent par une même droite.

Corollaire II. Si le point M est à l'infini, chaque plan polaire passe par le centre de la surface ainsi que chaque polaire. Donc, lorsque plusieurs surfaces du deuxième degré passent par une même courbe du quatrième, tous les centres se trouvent sur une même droite.

Proposition II. Les plans polaires relatifs à quatre de ces surfaces ont le même rapport anharmonique, quelle que soit la position du point M.

En effet, par le point M menons un plan quelconque. Il coupera les quatre surfaces suivant quatre coniques passant par quatre mêmes points. Le rapport anharmonique des polaires d'un point quelconque de ce plan est toujours le même, et ce rapport est égal à celui des quatre plans polaires. Or cela ayant lieu pour tous les plans passant par M, existe pour les points de leur commune intersection et, par suite, pour un point quelconque de l'espace. Donc, etc.

Corollaire. Si le point M est un des points communs d'intersection des surfaces, les plans tangents en ce point formeront donc un faisceau dont le rapport anharmonique sera le même, quelle que soit sa position sur la courbe d'intersection. Donc tous ces plans tangents formeront par les intersections de faisceaux homographiques un hyperboloïde passant par cette même courbe. (On voit, en effet, que pour deux points de cette courbe les deux faisceaux de plans tangents étant homographiques, se coupent sur cet hyperboloïde.) Chaque génératrice de cette surface se trouvant à la fois dans tous les plans tangents à toutes les surfaces passant par ce point, il en résulte que cet hyperboloïde sera tangent à toutes ces surfaces du deuxième degré suivant la courbe commune d'intersection.

Nous appellerons aussi, pour abréger, rapport anhar-

monique de quatre de ces surfaces du deuxième degré passant par une même courbe d'intersection, le rapport anharmonique des plans polaires d'un point quelconque relatives à ces courbes, ou bien le rapport anharmonique des quatre plans tangents à ces surfaces passant par une même droite, génératrice de l'hyperboloïde tangent à toutes les surfaces du deuxième ordre passant par la même courbe d'intersection.

Remarquons que l'hyperboloïde tangent ne contient généralement sur chaque génératrice qu'un seul point de la courbe du quatrième ordre, intersection commune des surfaces du deuxième degré, tandis que les hyperboloïdes qui nous ont servi (*voir* t. XV, p. 385) à déterminer cette courbe ont une génératrice qui passe par deux points de cette courbe.

Proposition III. Quand une série de surfaces du deuxième degré ont une même courbe d'intersection, si l'on prend les plans polaires d'un point quelconque par rapport à ces surfaces, et qu'ensuite par une droite P quelconque on mène des plans (dont trois de direction arbitraire) forment un faisceau homographique au faisceau formé par les plans polaires, je dis que ces plans, qui correspondront un à un respectivement aux surfaces du deuxième degré, rencontreront respectivement ces surfaces suivant des coniques dont le lieu géométrique sera une surface du troisième ordre passant par la courbe d'intersection et par la droite P.

En effet, si l'on coupe tout le système par un plan, les surfaces du deuxième degré donneront par leurs intersections un faisceau de coniques passant par quatre mêmes points et dont le rapport anharmonique sera celui des plans polaires, et le faisceau de plans donnera un faisceau de droites dont le rapport anharmonique sera celui du faisceau de plans; donc ce faisceau de droites sera homo-

graphique avec celui des coniques, et, par conséquent, les points d'intersections respectifs donneront, comme on sait (t. XIV, p. 360) une courbe du troisième ordre passant par les quatre points communs des coniques et par le sommet du faisceau de droites, sommet qui appartient à la droite P. Tous les plans sécants donneront de même des courbes du troisième ordre; donc le lieu de toutes ces courbes du troisième ordre sera bien une certaine surface du troisième ordre passant par la courbe d'intersection et par la droite P.

Proposition IV. Par quinze points de l'espace faire passer une surface du troisième degré.

Par huit de ces points, on fait passer un faisceau de surfaces du deuxième degré passant successivement par les points 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ce qui fait sept de ces surfaces. On cherche ensuite par le problème (*Nouvelles Annales*, t. XV, p. 161) la droite par laquelle sept plans étant menés par des points 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ces sept plans forment un faisceau homographique à celui des sept surfaces du deuxième degré passant respectivement par ces points. Les intersections des surfaces du deuxième degré par les plans respectifs correspondants donneront des sections coniques appartenant à la surface du deuxième degré passant par les quinze points donnés (prop. III).

Proposition V. Si par huit points on fait passer un faisceau de surfaces du deuxième degré et par huit autres points un autre faisceau, mais tel, que les rapports anharmoniques des deux faisceaux soient les mêmes, alors les deux surfaces du deuxième degré correspondantes de chaque faisceau se couperont suivant des courbes du quatrième degré dont l'ensemble formera une surface du quatrième degré passant par les seize points donnés (*voir* t. XII, p. 358).

SUR LA DIVISION ABRÉGÉE

(voir t. XIII, p. 170);

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Professeur au lycée Charlemagne.

PRINCIPE. *Quand on substitue au diviseur le nombre formé par ses* m + 1 *premiers chiffres significatifs (en remplaçant par des zéros ceux des chiffres supprimés qui sont à gauche de la virgule), on augmente le quotient d'une quantité moindre que l'unité de l'ordre de son* $m^{\text{ième}}$ *chiffre.*

En effet, substituer au diviseur exact 648,2717954 la valeur approchée 648,271 revient à multiplier le quotient par

$$\frac{648,2717954}{648,271} = 1 + \frac{0,0007954}{648,271},$$

ou à l'augmenter de son produit par $\frac{0,0007954}{648,271}$. Or cette fraction est moindre que $\frac{0,001}{100} = \frac{1}{10^5}$; d'ailleurs le quotient contient au plus 99999 unités de son cinquième chiffre : il est donc inférieur à 10^5 unités de l'ordre de ce chiffre; et, par suite, l'erreur en plus commise sur ce quotient n'atteint pas une unité du cinquième chiffre.

C. Q. F. D.

RÈGLE. *Pour obtenir, à moins d'une unité d'un certain ordre, le quotient de deux nombres entiers ou décimaux, on commence par déterminer l'ordre des plus hautes unités du quotient exact, et, par suite, le nombre des chiffres du quotient demandé; on prend* DEUX *chiffres de plus au diviseur et on divise le dividende par le*

nombre ainsi formé, abstraction faite des virgules. Seulement, après chaque division partielle, au lieu d'abaisser à la droite du reste le chiffre suivant du dividende, on divise ce reste tel qu'il est par le diviseur précédent privé de son dernier chiffre, et l'on s'arrête dès qu'on a au quotient le nombre de chiffres voulu. On place ensuite la virgule d'après l'approximation énoncée.

Exemple. Soient les deux nombres 15466,273863, 648,2717954 dont on demande le quotient à moins de 0,01.

Les plus hautes unités du quotient exact sont des dizaines; le quotient demandé aura donc *quatre* chiffres, puisque son dernier chiffre doit exprimer des centièmes. On prend pour diviseur le nombre de *six* chiffres 648,271, et en suivant la marche indiquée on trouve 23,85.

15466,27	648,271
250085	23,85
55604	
3748	
50,8	

Démonstration. En remplaçant le diviseur par le nombre de *six* chiffres 648,271, on augmente le quotient d'une quantité moindre qu'une unité de l'ordre de son *cinquième* chiffre, c'est-à-dire moindre que 0,001. Telle serait l'erreur, si l'on conservait pour diviseur 648,271; mais dans l'opération suivante, au lieu de diviser le reste par 648,271, on prend pour nouveau diviseur le nombre de *cinq* chiffres 648,27; de là résulte une nouvelle erreur, en plus, moindre qu'une unité du *quatrième* chiffre du nouveau quotient, c'est-à-dire moindre qu'une unité du *cinquième* chiffre du quotient total, et, par suite, moindre encore que 0,001. En continuant ainsi, on voit que chaque opération augmente le quotient d'une quantité moindre que 0,001; donc, après quatre opérations, l'erreur finale en plus sera plus petite que 0,004 et à fortiori que 0,01.

De plus, en négligeant de diviser le dernier reste par le dernier diviseur, c'est-à-dire en négligeant les chiffres du quotient qui suivent les centièmes, on commet une erreur en moins inférieure à 0,01.

Les deux erreurs, l'une en plus, l'autre en moins, se compensent en partie, et comme chacune d'elles est inférieure à 0,01, l'erreur totale est moindre que 0,01 en plus ou en moins.

Remarque. La règle précédente semble exiger que le quotient demandé ait moins de *onze* chiffres afin que l'erreur en plus soit moindre que $0{,}001 \times 10 = 0{,}01$. Mais hâtons-nous d'observer que la limite indiquée dans notre principe est loin d'être aussi resserrée que possible.

Au lieu de prendre 100 pour limite inférieure du diviseur, on peut mettre 640 puisque le dernier diviseur employé a toujours trois chiffres (on prend en effet deux chiffres de plus au diviseur qu'au quotient et l'on ne commence à supprimer un chiffre sur la droite du diviseur qu'à partir de la deuxième opération); on trouve alors pour limite de l'erreur, dans chaque opération partielle, $\frac{1}{6{,}4}$ de l'unité du cinquième chiffre du quotient, on a donc

$$\frac{0{,}001}{6{,}4} = \frac{0{,}01}{64},$$

et pour que l'erreur totale précédente produite par les altérations successives du diviseur ne dépasse pas 0,01, *il suffit que le nombre des chiffres du quotient demandé ne surpasse pas le nombre* 64 *formé par l'ensemble des deux premiers chiffres du diviseur.*

On voit ainsi :

Qu'il suffira de prendre au diviseur un chiffre de plus qu'au quotient toutes les fois que le nombre des chiffres

du quotient demandé n'excédera pas le premier chiffre du diviseur, et que, *en général,* n *étant le nombre des chiffres du quotient demandé, il faudra compter sur la gauche du diviseur assez de chiffres pour former un nombre au moins égal à* n *et puis prendre* n *chiffres de plus.* C'est la règle de M. Lionnet (t. XI, p. 148).

Il n'y a d'ailleurs aucune modification à faire dans le cas où un dividende partiel contient dix fois le diviseur correspondant. On prend alors 10 pour quotient partiel; on trouve que les quotients partiels suivants sont nuls, et le quotient ainsi obtenu est évidemment approché par excès.

RECUEIL DE FORMULES RELATIVES AU CERCLE

(voir t. XII, p. 302).

Multiples de π de 1 à 9 avec vingt décimales.

$\pi =$ 3,14159 26535 89793 23846
$2\pi =$ 6,28318 53071 79586 47692
$3\pi =$ 9,42477 79607 69379 71539
$4\pi =$ 12,56637 06143 59172 95385
$5\pi =$ 15,70796 32679 48966 19231
$6\pi =$ 18,84955 59215 38759 43077
$7\pi =$ 21,99114 85751 28552 66924
$8\pi =$ 25,13274 12287 18345 90770
$9\pi =$ 28,27433 38823 08139 14616

Multiples de $\frac{1}{\pi}$ de $\frac{1}{\pi}$ à $\frac{9}{\pi}$ avec vingt décimales.

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\ 98861\ 83790\ 6715\dot{4}$$

$$\frac{2}{\pi} = 0{,}63661\ 97723\ 67581\ 3530\dot{8}$$

$$\frac{3}{\pi} = 0{,}95492\ 96585\ 51372\ 01461$$

$$\frac{4}{\pi} = 1{,}27323\ 95447\ 35162\ 68613$$

$$\frac{5}{\pi} = 1{,}59154\ 94309\ 18953\ 3576\dot{9}$$

$$\frac{6}{\pi} = 1{,}90985\ 93171\ 02744\ 02923$$

$$\frac{7}{\pi} = 2{,}22816\ 92029\ 86534\ 70076$$

$$\frac{8}{\pi} = 2{,}54647\ 90894\ 70325\ 37230$$

$$\frac{9}{\pi} = 2{,}86478\ 89756\ 54116\ 0438\dot{4}$$

M. Du Hays a communiqué cette Table de $\frac{1}{\pi}$ avec vingt décimales ; M. Koralek a calculé $\frac{1}{\pi}$ avec vingt-cinq décimales. Les dix-neuf décimales à gauche sont les mêmes que ci-dessus et les six décimales à droite sont 377675.

Observation. Le point placé sur la décimale à droite indique que la valeur est trop forte d'une quantité moindre que $\frac{1}{2} . 10^{-20}$; l'absence du point indique que la valeur est trop faible d'une quantité moindre que $\frac{1}{2} \cdot 10^{-20}$.

A l'aide de ces deux Tables, les expressions dans lesquelles π entre comme facteur ou comme diviseur se ramènent à des additions :

$$l\pi = 1,44472\ 98858\ 49400\ 17414\ 34237$$
$$L\pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 11268\ 288$$

(Voir t. V, p. 80.)

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

VI.

Calcul numérique des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quand a *est très-petit.*

Je crois qu'il faudrait dire : « quand $\frac{ac}{b^2}$ est très-petit. » Il est du moins certain que les solutions qu'on a données de cette question dans des Traités d'Algèbre *entièrement conformes au programme officiel* peuvent être en défaut, quelque petit que soit a par rapport à b et c, lorsque la valeur de $\frac{ac}{b^2}$ n'est pas suffisamment petite.

Dans l'un de ces Traités, on a pris pour exemple l'équation

$$0,001 . x^2 + x - 1 = 0.$$

L'application de la méthode des *approximations successives* à cette équation a donné des valeurs de plus en plus approchées de la racine positive cherchée. Mais si on avait pris pour exemple l'équation

$$0,001 . x^2 + x - 10000 = 0,$$

est racine primitive relativement au nombre $4p+1$.

(TCHEBICHEF.)

Pour que 2 soit racine primitive de $4p+1$, il faut, comme l'indique la marche que l'on suit pour obtenir ces racines, que ce nombre ne se trouve ni parmi les résidus quadratiques, ni parmi les résidus de puissance p des $4p$ premiers nombres naturels. Or on sait que si 2 était résidu quadratique par rapport à l'un de ces nombres, x par exemple, c'est-à-dire si l'on avait

$$x_1^2 \equiv 2 \quad \text{mod. } (4p+1),$$

on aurait aussi (Serret, *Algèbre supérieure*, p. 332)

$$(1) \qquad 2^{2p} \equiv 1 \quad \text{mod. } (4p+1),$$

et s'il était résidu de puissances p, on aurait de même

$$(2) \qquad 2^4 \equiv 1 \quad \text{mod. } (4p+1).$$

La première de ces deux congruences est impossible, car n représentant un nombre premier, on a constamment (*Nouvelles Annales*, t. V, p. 657)

$$2^{\frac{n-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{n-1}{4}} \quad \text{mod. } (n),$$

expression qui se réduit dans le cas actuel à

$$(3) \qquad 2^{2p} \equiv (-1)^p \quad \text{mod } (4p+1),$$

et comme p est premier et par conséquent impair, la forme (3) entraîne l'impossibilité de la forme (1).

Quant à la congruence (2), elle ne pourrait évidemment avoir lieu que dans le cas de $p=1$, et dans ce cas on n'a plus à considérer les résidus de puissances p. Ainsi 2, ne se trouvant pas parmi les résidus des puissances marquées par les facteurs premiers de $4p$, sera racine primitive relativement à $4p+1$.

NOTE
Sur un problème d'analyse indéterminée;

PAR M. ARTHUR CAYLEY.

Euler a donné dans le Mémoire : *Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite solvendi* (*Comment. Arith. Coll.*, t. II, p. 263) la solution que voici de l'équation indéterminée

$$(1)\qquad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \zeta y^2 + \eta y + \vartheta.$$

En supposant que l'on ait la solution $x = a$, $y = b$ de manière que

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = \zeta b^2 + \eta b + \vartheta,$$

et en posant

$$s = \sqrt{\alpha r^2 + 1},$$

où r est une quantité quelconque, l'équation sera satisfaite par les valeurs

$$x = sa + \zeta rb + \frac{(s-1)\beta}{2\alpha} + \frac{1}{2} r\eta,$$

$$y = \alpha ra + sb + \frac{(s-1)\eta}{2\zeta} + \frac{1}{2} r\beta;$$

en effet, on voit sans peine que ces valeurs donnent identiquement

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha x^2 + \beta x + \gamma - (\zeta y^2 + \eta y + \vartheta) \\ &= \alpha a^2 + \beta a + \gamma - (\zeta b^2 + \eta b + \vartheta) = 0. \end{aligned} \right.$$

En supposant de plus que les coefficients α, β, γ, ζ, η, ϑ soient des nombres entiers tels, que $\alpha\zeta$ soit un en-

tier positif non carré, on peut toujours déterminer le nombre entier r de manière que s soit un nombre entier; cela étant, et en supposant que a, b soient des entiers, il est évident que x, y seront des nombres rationnels. Euler a de plus remarqué que l'on peut toujours faire en sorte que x, y soient des nombres entiers. En effet, si les formules donnent $x = a'$, $y = b'$ des valeurs non entières, en substituant dans les formules au lieu de a, b les valeurs a', b', on obtiendra pour x, y des valeurs entières; cela se vérifie sans peine.

L'équation indéterminée (2) rentre dans celle-ci

$$(3)\quad (a, b, c, f, g, h)(x', y', z')^2 = (a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2,$$

(*Voir* note I.)

en supposant que la forme ternaire

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$$

se transforme en elle-même au moyen d'une substitution linéaire quelconque. On peut supposer que cette substitution soit telle, que l'on ait $z' = z$; cela étant, en écrivant $z' = z = 1$ et en mettant de plus $h = 0$, l'équation (3) se réduit évidemment à une forme telle que l'équation (2). Or on peut trouver par la méthode générale de M. Hermite la solution convenable de l'équation (3). En supposant, comme à l'ordinaire,

$$\mathfrak{A} = bc - f^2 \ldots,\quad \mathfrak{F} = gh - af \ldots,$$
$$k = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh,$$

(*Voir* note II.)

il faut pour cela écrire

$$x' = 2\xi - x,$$
$$y' = 2\eta - y,$$
$$z' = 2\zeta - z,$$

et

$$ax + hy + gz = a\xi + h\eta + g\zeta - q\,\mathfrak{C}\eta + q\,\mathfrak{F}\zeta,$$
$$hx + bx + fz = h\xi + b\eta + f\zeta + q\,\mathfrak{C}\xi - q\,\mathfrak{G}\zeta,$$
$$gx + fy + cz = g\xi + f\eta + c\zeta - q\,\mathfrak{F}\xi + q\,\mathfrak{G}\eta,$$

où q est une quantité arbitraire. En effet, en multipliant ces équations par ξ, η, ζ et en ajoutant, on obtient

$$(a, b, c, f, g, h)(\xi, \eta, \zeta)(x, y, z)$$
$$= (a, b, c, f, g, h)(\xi, \eta, \zeta)^2 \text{ (note III)},$$

et, au moyen de cette équation et des valeurs

$$x' = 2\xi - x,$$
$$y' = 2\eta - y,$$
$$z' = 2\zeta - z,$$

on forme tout de suite l'équation (3) (note IV). De plus, en multipliant les trois équations par $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ et en ajoutant, on obtient

$$kz = k\zeta \text{ (note V)},$$

c'est-à-dire

$$z = \zeta$$

et de là

$$z' = z.$$

Cela étant, les deux équations donnent, en remplaçant ζ par z,

$$a\xi + (h - q\,\mathfrak{C})\eta = ax + hy + (g - q\,\mathfrak{F})z,$$
$$(h + q\,\mathfrak{C})\xi + b\eta = hx + by + (f + q\,\mathfrak{G})z,$$

et de là, en remarquant que

$$ab - (h - q\mathfrak{C})(h + q\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} + q^2\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}(1 + q^2\mathfrak{C}),$$

on obtient très-facilement, éliminant successivement η

et ξ,

$$(1 + q^2\mathfrak{C})\,\xi = (1 + qh)\,x + qby + (qf + q^2\mathfrak{G})\,z,$$

$$(1 + q^2\mathfrak{C})\,\eta = -\,qax + (1 - qh)\,y + (-\,qg + q^2\mathfrak{F})\,z$$

et ensuite

$$\begin{aligned}&(1 + q^2\mathfrak{C})\,x' \\ &= (1 + 2qh - q^2\mathfrak{G})\,x + 2qby + 2\,(qf + q^2\mathfrak{G})\,z,\\ &(1 + q^2\mathfrak{C})\,y' \\ &= -\,2qax + (1 - 2qh - q^2\mathfrak{C})\,y + 2\,(-\,qg + q^2\mathfrak{F})\,z,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en écrivant $z = z' = 1$, les valeurs

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&(1 + q^2\mathfrak{C})\,x' \\ &= (1 + 2qh - q^2\mathfrak{C})\,x + 2qby + 2\,(qf + q^2\mathfrak{G}),\\ &(1 + q^2\mathfrak{C})\,y' \\ &= -\,2qax + (1 - 2qh - q^2\mathfrak{C})\,y + 2\,(-\,qg + q^2\mathfrak{F}),\end{aligned}\right.$$

satisfont identiquement à l'équation

$$(5)\quad (a,\,b,\,c,\,f,\,g,\,h)\,(x',\,y',\,1)^2 = (a,\,b,\,c,\,f,\,g,\,h)\,(x,\,y,\,1)^2.$$

En prenant $h = 0$, on a

$$\mathfrak{C} = ab,\quad \mathfrak{F} = -\,af,\quad \mathfrak{G} = -\,bg,$$

et les formules deviennent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&(1 + q^2ab)\,x' = (1 - q^2ab)\,x + 2qby + 2q\,(f - qbg),\\ &(1 + q^2ab)\,y' = -\,2qax + (1 - q^2ab)\,y - 2q\,(g + qaf),\end{aligned}\right.$$

valeurs qui satisfont identiquement à l'équation (note VI)

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&(ax'^2 + 2gx' + l') + (by'^2 + 2fy' + m')\\ &= (ax^2 + 2gx + l) + (by^2 + 2fy + m),\end{aligned}\right.$$

et en y écrivant

$$\frac{1 - q^2ab}{1 + q^2ab} = s = \sqrt{1 - abr^2},$$

on obtient des formules qui correspondent précisément aux équations données par Euler pour x, y en termes de a, b.

Londres, 10 mars 1857.

NOTES DU RÉDACTEUR

Note I. D'après la commode notation introduite par M. Cayley, l'équation (3) développée a cette forme

$$ax'^2 + by'^2 + c'z'^2 + 2fy'z' + 2gx'z' + 2hx'y'$$
$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy.$$

Note II. Désignant par k le déterminant de chaque membre de l'équation (3), on a

$$k = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh;$$

prenant les dérivées de k successivement par rapport à chacune des six lettres a, b, c, f, g, h, on a

$$\mathfrak{A} = bc - f^2,\quad \mathfrak{B} = ac - g^2,\quad \mathfrak{C} = ab - h^2,$$

$$\mathfrak{F} = +\frac{1}{2}\frac{dk}{df} = gh - af,\quad \mathfrak{G} = fh - bg,\quad \mathfrak{H} = fg - ch.$$

Note III. Cette notation développée donne

$$x(a\xi + h\eta + g\zeta) + y(h\xi + b\eta + f\zeta) + z(g\xi + f\eta + c\zeta)$$
$$= a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\zeta\eta.$$

Note IV. Remplaçant dans la dernière équation respectivement x, y, z par $2\xi - x'$, $2\eta - y'$, $2\zeta - z'$, on obtient

$$x'(a\xi + h\eta + g\zeta) + y'(h\xi + b\eta + f\zeta) + z'(g\xi + f\eta + c\zeta)$$
$$= a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\xi\eta.$$

Note V. Exécutant les opérations indiquées, on

et ξ,

$$(1+q^2\mathfrak{C})\,\xi = (1+qh)\,x + qby + (qf+q^2\mathfrak{G})\,z,$$
$$(1+q^2\mathfrak{C})\,\eta = -\,qax + (1-qh)\,y + (-\,qg + q^2\mathfrak{F})\,z$$

et ensuite

$$(1+q^2\mathfrak{C})\,x'$$
$$= (1+2qh-q^2\mathfrak{G})\,x + 2qby + 2\,(qf+q^2\mathfrak{G})\,z,$$
$$(1+q^2\mathfrak{C})\,y'$$
$$= -\,2qax + (1-2qh-q^2\mathfrak{C})\,y + 2\,(-\,qg+q^2\mathfrak{F})\,z,$$

c'est-à-dire, en écrivant $z = z' = 1$, les valeurs

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&(1+q^2\mathfrak{C})\,x'\\ &= (1+2qh-q^2\mathfrak{C})\,x + 2qby + 2\,(qf+q^2\mathfrak{G}),\\ &(1+q^2\mathfrak{C})\,y'\\ &= -\,2qax + (1-2qh-q^2\mathfrak{C})\,y + 2\,(-\,qg+q^2\mathfrak{F}),\end{aligned}\right.$$

satisfont identiquement à l'équation

$$(5)\quad (a,\,b,\,c,\,f,\,g,\,h)\,(x',\,y',\,1)^2 = (a,\,b,\,c,\,f,\,g,\,h)\,(x,\,y,\,1)^2.$$

En prenant $h = 0$, on a

$$\mathfrak{C} = ab,\quad \mathfrak{F} = -\,af,\quad \mathfrak{G} = -\,bg,$$

et les formules deviennent

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}&(1+q^2ab)\,x' = (1-q^2ab)\,x + 2qby + 2q\,(f-qbg),\\ &(1+q^2ab)\,y' = -\,2qax + (1-q^2ab)\,y - 2q(g+qaf),\end{aligned}\right.$$

valeurs qui satisfont identiquement à l'équation (note VI)

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&(ax'^2+2gx'+l')+(by'^2+2fy'+m')\\ &= (ax^2+2gx+l)+(by^2+2fy+m),\end{aligned}\right.$$

et en y écrivant

$$\frac{1-q^2ab}{1+q^2ab} = s = \sqrt{1-abr^2},$$

on obtient des formules qui correspondent précisément aux équations données par Euler pour x, y en termes de a, b.

Londres, 10 mars 1857.

NOTES DU RÉDACTEUR

Note I. D'après la commode notation introduite par M. Cayley, l'équation (3) développée a cette forme

$$ax'^2 + by'^2 + c'z'^2 + 2fy'z' + 2gx'z' + 2hx'y'$$
$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy.$$

Note II. Désignant par k le déterminant de chaque membre de l'équation (3), on a

$$k = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh;$$

prenant les dérivées de k successivement par rapport à chacune des six lettres a, b, c, f, g, h, on a

$$\mathfrak{A} = bc - f^2, \quad \mathfrak{B} = ac - g^2, \quad \mathfrak{C} = ab - h^2,$$
$$\mathfrak{F} = +\frac{1}{2}\frac{dk}{df} = gh - af, \quad \mathfrak{G} = fh - bg, \quad \mathfrak{H} = fg - ch.$$

Note III. Cette notation développée donne

$$x(a\xi + h\eta + g\zeta) + y(h\xi + b\eta + f\zeta) + z(g\xi + f\eta + c\zeta)$$
$$= a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\zeta\eta.$$

Note IV. Remplaçant dans la dernière équation respectivement x, y, z par $2\xi - x'$, $2\eta - y'$, $2\zeta - z'$, on obtient

$$x'(a\xi + h\eta + g\zeta) + y'(h\xi + b\eta + f\zeta) + z'(g\xi + f\eta + c\zeta)$$
$$= a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\xi\eta.$$

Note V. Exécutant les opérations indiquées, on

donnés par les formules symboliques

$$\xi = \frac{1}{2^{k-1}} (1 + x)^{k-1} x^{\alpha},$$

$$\eta = \frac{1}{2^{k-1}} (1 + y)^{k-1} y^{\alpha},$$

dans lesquelles, après le développement du second membre, il faut remplacer les exposants par des indices.

3. Ces préliminaires admis, il est facile de démontrer le théorème suivant :

Il existe une relation, indépendante du mode de distribution des points A_1, A_2,..., A_n, *entre* P_1, P_2, P_3,... *et* P_ω, ω *désignant* $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ *selon que* n *est pair ou impair.*

En effet, on a d'abord pour l'aire du premier polygone (*voir* t. XV, p. 373)

$$P_1 = \frac{1}{2} \Sigma_1 = A_1 \Sigma_1.$$

Pour obtenir P_2, il suffira de changer dans cette formule x_1, y_1, x_2, y_2, etc., en $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$, etc., en en sorte que P_2 sera une somme d'expressions telles que les suivantes

$$\frac{1}{2} \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{y_2 + y_3}{2} - \frac{1}{2} \frac{y + y_2}{2} \cdot \frac{x_2 + x_3}{2},$$

dont le développement ne fournira que des termes de la forme $a[1, 2]$ ou $b[1, 3]$. On pourra donc écrire

$$P_2 = B_1 \Sigma_1 + B_2 \Sigma_2,$$

B_1, B_2 étant des coefficients numériques indépendants des coordonnées.

4. En continuant de cette manière, on aura les égalités suivantes :

(1) $$P_1 = A_1 \Sigma_1,$$

(2) $$P_2 = B_1 \Sigma_1 + B_2 \Sigma_2,$$

(3) $$P_3 = C_1 \Sigma_1 + C_2 \Sigma_2 + C_3 \Sigma_3,$$

. . . .

(ω) $$P_\omega = L_1 \Sigma_1 + L_2 \Sigma_2 + L_3 \Sigma_3 + \ldots + L_\omega \Sigma_\omega,$$

auxquelles il faudra joindre, suivant les cas,

($\omega + 1$) $$\Sigma_\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma\omega = -\Sigma_{\omega-1} \ (^*).$$

5. La loi des coefficients qui entrent dans ces équations est assez compliquée, mais il suffit, pour notre objet, de remarquer que ceux que nous désignons par A_1, B_2, $C_3, \ldots, L_\omega$ ne sont pas nuls. On trouve en effet

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}, \quad D_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}, \ldots.$$

Il résulte de cette remarque qu'on pourra toujours éliminer entre ces $\omega + 1$ équations les quantités $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\omega$ qui sont au nombre de ω. Le résultat de cette élimination sera la relation entre $P_1, P_2, \ldots, P_\omega$ dont l'existence était à démontrer.

Cette relation sera d'ailleurs linéaire et de la forme

(R) $$P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + \ldots + A_\omega P_\omega = 0.$$

(*) $\frac{1}{2}\Sigma_2$, $\frac{1}{2}\Sigma_3$, etc., expriment les surfaces des polygones obtenus en joignant de deux en deux, de trois en trois, les sommets de P_1. Par exemple l'égalité (2), dans laquelle $B_1 = \frac{1}{4}$, $B_2 = \frac{1}{8}$, peut s'écrire ainsi

$$P_2 = \frac{P_1}{2} + \frac{Q}{4},$$

Q désignant l'aire du polygone obtenu en joignant de deux en deux les sommets de P_1.

SOLUTION DE LA QUESTION 349

(voir t. XV, p. 407);

PAR LE P. H. ROCHETTE,

Si une équation du troisième degré et sa dérivée ont toutes leurs racines rationnelles, les racines a, b, c de la première seront données par les formules

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

m, h et u étant des nombres rationnels. (PROUHET.)

Soient donc a, b, c les trois racines de l'équation donnée

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les racines de la dérivée soient rationnelles est exprimée par la relation

$$P^2 - 3Q = C^2.$$

Si nous y remplaçons P et Q par leurs valeurs en fonction des racines, elle prendra la forme suivante :

$$(a-b)^2 + (a-c)(b-c) = C^2,$$

et cette relation entre les trois racines a, b, c suffit pour qu'on puisse les mettre sous la forme indiquée.

En effet, si nous éliminons m et h entre les trois équations

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

nous obtiendrons une équation du second degré en u

$$(a-c)u^2 - 2(a-b)u - (b-c) = 0,$$

qui donnera pour u des valeurs rationnelles toutes les fois que

$$(a-b)^2+(a-c)(b-c)$$

sera un carré parfait. On pourra donc, dans ce cas-là, trouver aussi pour m et h des valeurs rationnelles, et exprimer les trois nombres rationnels a, b, c au moyen des fonctions indiquées de m, h et u.

Le problème a deux solutions dans le cas où P^2-3Q n'est pas nul, et une seule dans le cas contraire.

On démontrerait très-facilement que réciproquement lorsque les trois racines a, b, c d'une équation du troisième degré sont données par les formules

$$a=m+h,\quad b=mu^2+h,\quad c=2mu+h,$$

les racines de la dérivée sont rationnelles.

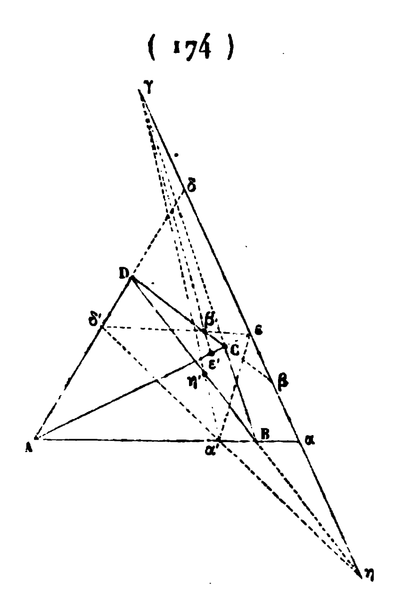
SOLUTIONS DES QUESTIONS 353 ET 354

(voir t. XV, p. 464);

PAR M. L. BOURDELLES,
Élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Question 353.

Soit ABCD un quadrilatère coupé par une transversale en α sur le côté AB et en β sur le côté opposé CD; soient α' le conjugué harmonique de α par rapport aux points A, B, et β' le conjugué harmonique de β par rapport aux points C, D; menons la droite $\alpha'\beta'$, faisons une construction analogue sur les côtés opposés AC, BD et sur les diagonales AC, BD : les trois droites passent par le même point. (DE LAFFITTE.)



Je désigne le point d'intersection de la sécante avec

BC	par	γ_1	et par	γ'	son conjugué.
AD	—	δ_1	—	ρ'	—
AC	—	ϵ_1	—	ϵ'	—
BD	—	η_1	—	η'	—

Les droites DB, $\delta\alpha$ se coupent en un point η; je le joins aux points α' et δ' ainsi qu'au point A. Les deux droites $\eta\delta'$, $\eta\alpha'$, étant conjuguées de la droite $\delta\eta$ par rapport aux mêmes droites DB, Aη, doivent se confondre, c'est-à-dire que la ligne $\delta'\alpha'$ passe par le point η. On verrait de la même manière que la droite $\beta'\gamma'$ passe aussi par le point η.

Un raisonnement semblable montrerait que les droites $\alpha'\gamma'$, $\delta'\beta'$ passent par le point ϵ et que les droites $\eta'\beta'$, $\alpha'\epsilon'$ passent par le point γ.

Or dans le quadrilatère $\alpha'\gamma'\beta'\delta'$ les diagonales $\alpha'\beta'$, $\delta'\gamma'$ se coupent en un même point O, pôle de $\eta\epsilon$. De même

dans le quadrilatère $\alpha'\varepsilon'\beta'\eta'$ les diagonales $\alpha\beta'$, $\eta'\varepsilon'$ se coupent en un même point situé comme le point O sur $\alpha'\beta'$ qui est une diagonale commune à ces deux quadrilatères. Ce point d'intersection est le pôle de la droite $\eta\gamma$. Mais ces deux droites $\eta\gamma$, $\eta\varepsilon$ coïncident: donc le point d'intersection des droites $\alpha'\beta'$, $\eta'\varepsilon'$ est le même que celui des droites $\alpha'\beta'$, $\delta'\gamma'$, ce qui démontre le théorème.

« On pourrait simplifier la démonstration en remar-
» quant que deux côtés quelconques de l'hexagone formé
» par les six points α, β, γ, δ, ε, η sont divisés homo-
» graphiquement par les quatre autres; il en résulte que
» les diagonales qui joignent les sommets opposés passent
» par un même point. » (*Géométrie supérieure*, n° 414.)

Remarques. Les six points α', β', γ', δ', ε', η' sont toujours sur une même conique, car les côtés opposés de l'hexagone dont ces six points sont les sommets, se coupent sur une même droite qui est la sécante.

Si la sécante s'éloigne à l'infini, on retrouve ce théorème :

La ligne qui joint les milieux des diagonales d'un quadrilatère et les lignes qui joignent les milieux des côtés opposés se coupent en un même point.

Ce point divise chacune d'elles en deux parties égales.

On aurait pu déduire aussi ce théorème du théorème proposé en faisant la perspective de la figure de manière à envoyer la sécante à l'infini, en employant le procédé décrit par M. Poncelet. (*Propriétés projectives*, page 54.)

Question **354.**

On déduit ce théorème de la proposition 353 par les polaires réciproques. Les deux théorèmes sont corrélatifs (*voir* p. 24).

Remarque. Si l'on suppose que le point s'éloigne à l'infini sur une droite quelconque, on trouve ce théorème :

Si dans un quadrilatère on mène une transversale quelconque et qu'on joigne le sommet A *au milieu du segment intercepté sur la sécante par les côtés* AB, AD *aboutissant à ce sommet ; si l'on fait la même construction par rapport au sommet opposé* B, *les deux droites ainsi obtenues se coupent en un certain point. En opérant de même par rapport aux sommets* B *et* C *ainsi que par rapport aux points de concours des côtés opposés, les trois points d'intersection sont en ligne droite.*

On peut également déduire ce théorème en faisant la perspective de la figure sur laquelle est fondée la question 354.

Note. M. Richard Oxamendi adresse une solution aussi fondée sur des considérations segmentaires.

SOLUTION DE LA QUESTION 359

(voir t. XVI, p. 58);

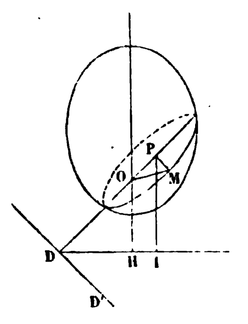
PAR M. L. BOURDELLES,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Une surface de révolution étant engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe principal, tout plan mené par un foyer O de la conique coupe la surface suivant une conique qui a le même point O pour foyer (*). (MÖBIUS.)

Soit DD′ l'intersection du plan sécant et du plan polaire du point O. Je dis que le point O est le foyer de la section et que DD′ est la directrice.

(*) MM. Persoz et Clery donnent une solution analytique et font la bonne observation que l'axe principal doit être l'axe à foyer. M. Poupelet, élève de M. Amiot (lycée Napoléon), adresse une solution analytique et géométrique; de même M. A. Rainbaux. TM.

Pour le démontrer, j'abaisse du point M, pris d'une



manière quelconque sur la courbe, une perpendiculaire MP sur son axe, lequel va rencontrer DD′ au point D. Il suffit de faire voir que

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{DP}} = \text{constante}.$$

Or, en abaissant du point P la perpendiculaire PI sur le plan polaire, on aura

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PI}} = \frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OH}}.$$

Mais si je considère le méridien de la surface passant par le point M, sa trace sur le plan polaire est la directrice de la conique méridienne, et comme la distance du point M à cette directrice est égale à PI, on aura

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{PI}} = k = \text{constante}.$$

Donc, en remplaçant PI par sa valeur dans l'égalité (1), il viendra

$$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{OM}} = \frac{1}{k} \times \frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OH}} = \text{constante},$$

car les longueurs DO, OH ne varient pas quand le point M se déplace sur la courbe.

QUESTIONS.

372. Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le *degré* de l'enveloppe de la droite qui renferme ces trois points.

373. Soit une équation algébrique à coefficients entiers et le premier terme ayant pour coefficient l'unité; si les modules de toutes les racines sont égaux à l'unité, toutes les racines de l'équation sont des racines de l'unité.

(HERMITE.)

374. Soient

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma),\quad (\alpha',\ \beta',\ \gamma'),\quad \lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

les coordonnées de deux points et l'équation d'une droite situés dans le même plan. Posons

$$u = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \end{vmatrix} \qquad v = s\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a, & b, & c \end{vmatrix}$$

$uw - v^2 = 0$ est l'équation d'une conique qui passe par les deux points et touche la droite; a, b, c, s sont des constantes arbitraires.

(CAYLEY.)

Observation. On fait usage ici de la notation de Hesse; les coordonnées d'un point dans un plan sont exprimées par les formes $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; on revient à la notation vulgaire en faisant

$$\gamma = 1, \quad z = 1;$$

dans l'équation v, la constante s multiplie le déterminant.

375. Deux cercles concentriques ayant pour rayons r et $r\sqrt{-1}$ se coupent à angle droit. Démontrer et expliquer ce résultat d'apparence paradoxale.

376. Sur toute surface du troisième degré, on peut trouver vingt-sept droites.

377. Soient AA_1, BB_1, CC_1 les trois perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle ABC respectivement sur les côtés opposés; considérons le triangle A_1, B_1, C_1; soient A_2 le point où B_1C_1 coupe AA_1; B_2 le point où A_1C_1 coupe BB_1, C_2 le point où A_1B_1 coupe CC_1; considérons le triangle $A_2B_2C_2$; soient A_3 l'intersection de B_2C_2 avec AA_1; B_3 l'intersection de A_2C_2 avec BB_1, et C_3 l'intersection A_2B_2 avec CC_1; et ainsi de suite.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

étant les équations des côtés BC, AC, AB du triangle, l'équation de A_nB_n sera

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = 0$$

ou

$$m_n = \frac{m_{n-1}+2}{m_{n-1}}, \quad m_{n-1} = \frac{m_{n-2}+2}{m_{n-2}}, \ldots, \quad m_2 = \frac{m_1+2}{m_1},$$
$$m_1 = 1,$$

d'où

$$m_{2n} = \frac{2^{2n+1}+1}{2^{2n}-1}, \quad m_{2n+1} = \frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+1}+1};$$

l'équation de $A_\infty B_\infty$ est donc

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 2\gamma \cos C = 0;$$

de même pour les côtés B_nC_n, A_nC_n.

1°. La droite AA_1 bissecte l'angle $B_nA_nC_n$; de même les droites BB_1, CC_1.

2°. Toutes les droites A_nB_n passent par le même point;

de même les droites $A_n C_n$, $B_n C_n$; et ces trois points sont sur une même droite.

(E. HARRISON, B. A. Trin. Coll. Cambr.)

378. Deux droites fixes A, A′ et deux points fixes *o*, *o′* sont donnés dans un même plan. Une molécule M parcourt la première droite avec un mouvement représenté par l'équation

$$e = a + bt,$$

et une molécule M′ parcourt la seconde droite A′ avec un mouvement représenté par l'équation

$$e = a' + b' t;$$

e désigne l'espace, *t* le temps et *a*, *b*, *a′*, *b′* sont des constantes données. S et S′ étant deux positions *simultanées* des deux molécules, on demande : 1° de trouver l'équation du lieu géométrique de l'intersection des deux droites *o*S, *o′*S′; 2° l'équation de l'enveloppe de la droite SS′; 3° de démontrer qu'il existe une relation *homographique* entre les points S et S′.

379. Mêmes données géométriques; le mouvement du point M est donné par l'équation

$$e = at$$

et celui du point M′ par

$$et = a';$$

on demande de trouver : 1° l'équation du lieu géométrique de l'intersection des droites *o*S, *o*S′; 2° l'équation de l'enveloppe de la droite SS′; 3° de démontrer qu'il existe entre les points S et S′ une relation d'*involution*.

380. Soient donnés un angle trièdre trirectangle de sommet S et un point quelconque O par lequel on mène un plan P coupant les faces de l'angle suivant ABC; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point O partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois

triangles; p, p', p'' étant les aires des parallélogrammes, on a

$$\frac{1}{p^2\sin^2(SA, P)} + \frac{1}{p'^2\sin^2(SB, P)} + \frac{1}{p''^2\sin^2(SC, P)}$$
$$= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}\right)^2 \frac{1}{\sin^2(SO, P)};$$

(SA, P) est l'angle de la droite SA et du plan P, p est l'aire du parallélogramme ayant l'un de ses sommets en A; de même p' a un sommet en B et p'' en C.

Lorsque le point O est extérieur au triangle ABC, il y a un changement de signes à faire dans le second membre.

(MANNHEIM.)

381. Représentons par Σp la somme de tous les diviseurs de p, l'unité et p compris. Soient $1, d_1, d_2, d_3,\ldots, m$ *tous* les diviseurs du nombre m. Faisons

$$\frac{m}{1} = m, \quad \frac{m}{d_1} = \delta_1, \quad \frac{m}{d_2} = \delta_2, \quad \frac{m}{d_3} = \delta_3, \ldots, \quad \frac{m}{m} = 1;$$

on aura cette identité

$$\Sigma 1 + d_1\Sigma d_1 + d_2\Sigma d_2 + d_3\Sigma d_3 + \ldots + m\Sigma m$$
$$= \frac{m^2}{1}\Sigma 1 + (\delta_1)^2\Sigma d_1 + (\delta_2)^2\Sigma d_2 + (\delta_3)^2\Sigma d_3 + \ldots + 1\Sigma m$$

où $\Sigma 1 = 1$.

Exemple.

$$m = 6, \quad d_1 = 2, \quad d_2 = 3,$$
$$\Sigma d_1 = 3, \quad \Sigma d_2 = 4, \quad \Sigma 6 = 12,$$
$$\delta_1 = 3, \quad \delta_2 = 2,$$
$$1 + 2.3 + 3.4 + 6.12 = 36.1 + 9.3 + 4.4 + 12 = 91;$$

l'identité peut s'écrire ainsi d'une manière abrégée

$$\Sigma(d\Sigma d) = \Sigma(\delta^2\Sigma d).$$

(J. LIOUVILLE.)

382. Soit $f(x)$ une fonction algébrique de x et soient $1, d_1, d_2, d_3,\ldots, m$ tous les diviseurs de m. Remplaçant

x par tous ces diviseurs, posons

$$f(1)+f(d_1)+f(d_2)+\ldots+f(m)=\mathrm{F}(m).$$

Soient parmi ces diviseurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ *tous* les nombres premiers facteurs de m; on a l'identité

$$f(m)=\mathrm{F}(m)-\Sigma\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)+\Sigma\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right)-\Sigma\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)+\ldots$$

ou

$$\Sigma\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)=\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_2}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_3}\right),$$

$$\Sigma\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right)=\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_3}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_4}\right)+\ldots$$
$$+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_2\alpha_3}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_2\alpha_4}\right)+\ldots$$

. . . .

$$\Sigma\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)=\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right)+\mathrm{F}\left(\frac{m}{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}\right)+\ldots.$$

La loi est en évidence. (J. Liouville.)

383. Soient donnés dans un même plan : 1° une courbe algébrique par une équation de degré n; 2° un triangle dont les côtés sont donnés par les trois équations linéaires

$$p=0,\quad q=0,\quad r=0;$$

d'un point quelconque M pris sur la courbe, abaissons sur les côtés du triangle p, q, r respectivement les perpendiculaires P, Q, R; construisons une seconde courbe dont les points aient pour coordonnées $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$, $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$; démontrer: 1° que la seconde courbe est aussi de degré n; 2° que l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants M, m des deux courbes est de degré $2n$.

384. La droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre ordinaire change à chaque instant de longueur et de direction: trouver l'équation de la ligne

décrite par le milieu de cette droite et la loi du mouvement.

385. Mêmes données : trouver l'équation de l'enveloppe de la droite.

386. Le produit de trois nombres entiers consécutifs ne peut être ni un carré ni le double d'un carré (*).

(FAURE.)

387. Lorsque les coefficients de l'équation générale du quatrième degré

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

ont entre eux la relation

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'invariant cubique de la fonction du quatrième degré est nul, l'expression algébrique des racines de l'équation ne contient pas de radical cubique.

(FAURE.)

388. m droites sont données dans un plan, ainsi qu'un point A. Soient (a, b) le point d'intersection de deux quelconques de ces droites a, b, et B la droite conjuguée harmonique de la droite qui passe par A et (a, b) relativement aux deux droites a et b. Nous aurons dans le plan $\frac{1}{2}m(m-1)$ points (a, b) et autant de droites B. On demande : 1° de démontrer que par ces $\frac{1}{2}m(m-1)$ points on peut toujours mener une courbe de degré $m-1$ qui touche les droites B en ces points (a, b) ; 2° donner l'équation de cette courbe ; 3° appelant A la courbe ainsi construite, considérons une autre courbe B tracée au moyen d'un second point A′ de la même manière que la précédente ; du point A, on peut mener $(m-1)(m-2)$ tan-

(*) Le produit de tant de nombres consécutifs qu'on veut ne peut être une puissance parfaite d'aucun nombre. TM.

gentes à la courbe B, par le point A′ on peut en mener autant à la courbe A : on a ainsi $2(m-1)(m-2)$ points de contact qui sont sur une courbe de degré $m-2$; 4° donner l'équation de cette courbe. (FAURE).

389. La somme des carrés des coefficients de $(k+1)^r$, r étant entier positif, est égal à $\frac{[2r]}{[r^2]}$, les crochets désignant des produits continuels. Exemple

$$r=3,$$

alors

$$1^2+3^2+3^2+1^2=\frac{1.2.3.4.5.6}{(1.2.3)^2}=20.$$

(LAGRANGE.)

390. Soit AEFD un rectangle; de F on abaisse une perpendiculaire FG sur la diagonale DE; par G on mène une parallèle au côté EF rencontrant le côté AE en C et une parallèle GB au côté DF rencontrant AD en B. Faisons

$$EF=m,\quad DF=n,\quad DE=d,\quad FG=h,$$
$$CG=b,\quad BG=c,\quad DG=f,\quad EG=g,$$

on a

$$h^3=bcd,\quad d^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}},\quad d^2-b^2-c^2=3fg.$$

(H. MONTUCCI, professeur au lycée Saint-Louis.)

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION 365 (SYLVESTER)

(voir t. XVI, p. 125) ;

PAR M. E. PROUHET.

Le théorème de M. Sylvester est un cas particulier du suivant :

Si a *et* b *sont deux nombres entiers,* b *étant moindre*

que a *ou au plus égal à* a, *la partie entière de*

$$\left(a + \sqrt{a^2 + 2b}\right)^{2m+1}$$

est divisible par 2^{m+1}.

Je pose, pour abréger,

$$R = a + \sqrt{a^2 + 2b}$$

et

$$R^n = A_n + B_n \sqrt{a^2 + 2b},$$

en sorte qu'on aura

$$A_1 = a, \quad B_1 = 1.$$

La partie entière de R étant $2a$, on voit que le théorème est vrai pour $m = 0$. Sa vérité, dans tous les cas, résulte des théorèmes suivants :

Théorème I. *Si* A_{2m+1} *et* B_{2m+1} *sont divisibles par* 2^k, A_{2m+3} *et* B_{2m+3} *seront divisibles par* 2^{k+1}.

En effet, on a

$$R^{2m+1}.R^2 = R^{2m+3}$$

$$= \left(A_{2m+1} + B_{2m+1}\sqrt{a^2 + 2b}\right)\left(2a^2 + 2b + 2a\sqrt{a^2 + 2b}\right),$$

d'où l'on déduit

$$A_{2m+3} = (2a^2 + 2b)A_{2m+1} + 2a(a^2 + 2b)B_{2m+1},$$
$$B_{2m+3} = 2a\,A_{2m+1} + (2a^2 + 2b)B_{2m+1},$$

égalités qui rendent la conclusion évidente.

Corollaire. A_1 et B_1 sont divisibles par 2 : donc A_{2m+1} *et* B_{2m+1} *sont divisibles par* 2^m.

Théorème II. *La partie entière de* R^{2m+1} *est* $2A_{2m+1}$.

En effet, R étant racine de l'équation

(1) $$x^2 - 2ax - 2b = 0,$$

R^{2m+1} sera racine de l'équation

(2) $$x^2 - 2A_{2m+1}x - 2^{2m+1}b^{2m+1} = 0,$$

car la somme des $(2m + 1)^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de

l'équation (1) est $2A_{2m+1}$, et le produit de ces puissances est $-(2b)^{2m+1}$.

En résolvant l'équation (2), on aura

$$R^{2m+1} = A_{2m+1} + \sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}}.$$

Il faut donc démontrer que l'on a en général

$$2^{2m+1} b^{2m+1} \leqq 2A_{2m+1}.$$

Cette inégalité est déjà vérifiée pour $m = 0$, et nous allons faire voir que si elle a lieu jusqu'à un certain nombre m, elle aura encore lieu pour $m+1$.

En effet, on a

$$R^{2m+3}$$

$$= \left(A_{2m+1} + \sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}}\right)\left(2a^2 + 2b + 2a\sqrt{a^2+2b}\right),$$

d'où l'on déduit

$$A_{2m+3} = (2a^2 + 2b) A_{2m+1} + 2a\sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}}\sqrt{a^2+2b},$$

valeur rationnelle malgré sa forme, car

$$\sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1} b^{2m+1}} = B_{2m+1}\sqrt{a^2+2b}:$$

il en résulte

$$A_{2m+3} > (2a^2 + 2b) A_{2m+1} + 2a^2 A_{2m+1}$$
$$> (2a^2 + b) 2A_{2m+1}.$$

Cette inégalité ne sera pas troublée si l'on remplace dans le second membre $2A_{2m+1}$ par $2^{2m+1} b^{2m+1}$, quantité qui est plus petite par hypothèse, et $2a^2 + b$ par $2b^2$. On aura donc

$$A_{2m+3} > 2^{2m+2} b^{2m+3},$$

ou

$$2A_{2m+3} > 2^{2m+3} b^{2m+3}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. A_{2m+1} étant divisible par 2^m (corollaire du théorème Ier), il en résulte que $2A_{2m+1}$ est divisible par

2^{m+1}. Donc la partie entière de R_{2m+1} est divisible par 2^{m+1}, ce qui est le théorème de M. Sylvester généralisé.

On peut compléter l'énoncé du théorème en ajoutant que la valeur entière la plus approchée *par excès* de R^{2m} est divisible par 2^m.

SOLUTION DE LA QUESTION 366 (*)

(voir p. 126);

PAR M. MANNHEIM.

Soit C le point de rencontre des droites M, N. Je circonscris la circonférence O au triangle ABC. Du point C comme centre, je décris une circonférence tangente à la circonférence O; soit D le point de contact. Lorsque la circonférence O roule dans l'intérieur de la circonférence C, les points A et B décrivent les droites M et N, je dis qu'un point quelconque du plan de la circonférence O décrit une ellipse. (Le point O seul décrit une circonférence.)

En effet, je joins ce point au centre O, cette droite coupe la circonférence O en deux points qui décrivent des droites perpendiculaires entre elles; le lieu cherché est donc celui d'un point d'une droite de longueur constante dont les extrémités parcourent des droites perpendiculaires entre elles. Donc, etc. (D'où l'on déduit très-facilement la construction que j'ai donnée, tome IX, page 419.)

Ce que je viens de dire suffit pour la première et la seconde partie de la question 366. Je passe à la troisième partie. Soit E le centre du segment capable de l'angle

(*) On est prié de faire la figure.

donné, ce point décrit une ellipse dont la normale au point E est ED. Cette droite coupe la circonférence E aux points où cette courbe touche son enveloppe (théorème de Descartes).

D'après cela, l'enveloppe est le lieu des extrémités d'une droite de longueur constante qui se meut en restant constamment normale à une ellipse fixe. On peut dire aussi que cette enveloppe se compose de deux développantes de la développée de l'ellipse.

Il est facile de voir que la projection du foyer de l'ellipse sur les tangentes à cette courbe est une conchoïde du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre, le foyer étant le pôle de cette conchoïde.

Pour la quatrième partie, je ferai remarquer que sur une droite AB, on peut décrire deux segments capables d'un angle donné : l'un fait partie de la circonférence O dont les points décrivent des droites et dont l'enveloppe se compose de la circonférence C et de son centre, l'autre ne conduit à rien d'intéressant.

Ce qui suit n'est pas proposé dans la question 366.

Soit G un point quelconque de AB. Je mène DG qui coupe la circonférence O au point H. Je puis considérer G comme faisant partie d'une droite DH dont les extrémités décrivent la droite CH et le diamètre CD.

CH étant perpendiculaire sur DG normale à l'ellipse décrite par le point G, est la direction conjuguée du diamètre CG. Lorsque DH prend la direction CH, le point G vient en G' et l'on a CG' = DG; DG est donc la longueur du demi-diamètre conjugué de CG.

De là la construction suivante qui donne en grandeur et en direction les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.

CG et CG' étant les demi-diamètres conjugués donnés, du point G j'abaisse sur CG' la perpendiculaire GH que

je prolonge dans le sens HG d'une longueur GD égale à CG'. Sur CD comme diamètre, je décris la circonférence O, je mène le diamètre GO; les distances du point G aux extrémités de ce diamètre sont les demi-axes de l'ellipse, et les droites qui vont du point C à ces mêmes extrémités déterminent la direction des axes.

Dans un prochain article, je donnerai de cette construction une démonstration géométrique fondée sur les projections, je montrerai aussi comment on peut en déduire la construction connue de M. Chasles.

Note du Rédacteur. M. Breton (de Champ) fait observer qu'il a déjà traité cette question d'une manière complète et géométriquement dans les *Nouvelles Annales* (t. V, p. 591-599); qu'on trouve dans le même recueil une solution analytique (t. IV, p. 186 et 191). Cela n'a pas empêché qu'on ne se soit donné la peine de *redécouvrir* une partie de cette théorie dans le *Journal de* M. Liouville (t. XIV, p. 417) et dans le XXXVIe cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Note sur des théorèmes de Schooten et de La Hire. *Beati qui nihil legunt: omnia invenient.*

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA QUESTION 369

(voir p. 126);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Soient ABC un triangle donné, D un point fixe dans son plan, α, β, γ les trois points où les droites DA, DB, DC rencontrent les côtés du triangle opposés aux sommets par lesquels elles passent respectivement.

Si l'on décrit la conique Σ qui passe par les points α, β, γ et qui touche les côtés BC, AC, cette conique sera aussi tangente au côté AB.

En effet, soient α_1, β_1, γ_1 les trois points infiniment voisins de α, β, γ dans les directions BC, AC et AB respectivement; s'il est possible de prouver que les côtés opposés de l'hexagone $\alpha\alpha_1\beta\beta_1\gamma\gamma_1$ se rencontrent en trois points situés en ligne droite, la proposition énoncée sera un simple corollaire du théorème de Pascal (*Géom. sup.*, n° 658), et par conséquent sera démontrée.

Les côtés opposés de cet hexagone sont AB et $\alpha\beta$, AC et $\alpha\gamma$, BC et $\beta\gamma$. Or les deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ ayant (par construction) leurs sommets situés deux à deux sur trois droites concourantes en un même point D, sont *homologiques*, et, par suite, leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points situés en ligne droite (*Géom. sup.*, n° 365). Donc, etc.

Cela posé, il s'agit de mener deux droites R et S rencontrant AB aux points r_1, s_1, BC aux points r_2, s_2 et AC aux points r_3, s_3, de telle sorte que les trois systèmes de cinq points r_1, s_1, A, γ, B; r_2, s_2, B, α, C; r_3, s_3, C, β, A soient en involution, α, β, γ étant des *points doubles*.

Qu'on décrive une conique quelconque Σ' par les trois sommets du triangle ABC. Elle aura, avec la conique inscrite Σ, trois systèmes de cordes communes ou *axes de symptose* conjugués, dont deux pourront être imaginaires, mais dont un sera toujours réel (Poncelet, *Traité des propriétés projectives*) (*). Chacun de ces systèmes de deux droites satisfera à la question proposée. Car ce système peut être regardé comme représentant une conique circonscrite au même quadrilatère que Σ et Σ', et, par conséquent, toute transversale, par exemple l'un quelconque des côtés du triangle ABC, rencontre ces deux droites et les deux coniques en six points en involution

(*) Deux coniques ont en commun quatre points.

(*Géom. sup.*, n° 743 étendu aux coniques). Ici deux des six points se confondent en un seul α ou β ou γ, puisque la conique Σ est tangente aux côtés du triangle ABC. Donc ces points sont des *points doubles* des involutions auxquels ils appartiennent respectivement (*Géom. sup.*, n°s 192 et 205).

La conique Σ' n'étant assujettie par l'énoncé qu'à la seule condition de passer par les trois sommets du triangle ABC, est indéterminée; une infinité satisfont à la question, et, par conséquent, il existe une infinité de systèmes de deux droites R et S qui remplissent la condition exigée.

Pour que la question soit déterminée, il faut, par exemple, qu'on donne à priori l'une R des deux droites ou bien leur point de concours O.

Dans le premier cas, on fera passer la conique Σ' par les trois points A, B, C et par les deux points d'intersection (réels ou imaginaires) de la conique Σ avec la droite donnée R. L'axe de symptose de ces deux coniques qui est conjugué à R sera la deuxième droite cherchée S.

Dans le second cas, on sait que le point O étant un point de concours de deux cordes communes conjuguées des deux coniques Σ, Σ', jouit de la propriété d'avoir même polaire par rapport à ces deux coniques. Soit donc L sa polaire prise relativement à la conique inscrite Σ. La question devient celle-ci : Par trois points A, B, C faire passer une conique Σ' telle, qu'un point donné O ait pour polaire, relativement à elle, une droite aussi donnée L, question facile à résoudre, puisqu'il suffit, pour obtenir deux nouveaux points de cette conique, de déterminer sur chacun des rayons OA et OB par exemple, le conjugué harmonique du point A ou du point B par rapport au segment que la polaire L intercepte sur ce rayon à partir du point O.

Chacun des systèmes de cordes communes des deux

coniques Σ, Σ' résout la question 369, qui, ainsi circonscrite, comporte généralement trois solutions distinctes, dont deux peuvent être imaginaires, mais dont la troisième est toujours réelle.

Ces diverses constructions peuvent se traduire en analyse d'une manière simple à l'aide des notations abrégées dont on fait usage depuis quelques années dans la géométrie analytique et dont on trouve de nombreuses et intéressantes applications dans l'excellent *Traité des sections coniques* du Rév. G. Salmon, professeur à l'université de Dublin. Mais je n'entrerai pas ici dans ces nouveaux développements, qui ne pourraient, ce me semble, rien ajouter au fond même de la solution qui précède.

NOTE SUR LES QUESTIONS 368 ET 369 (CAYLEY)

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Soient

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

les équations respectives des trois côtés BC, AC, AB des trois côtés d'un triangle ABC. Prenons un point arbitraire C dans le plan du triangle, joignons ce point aux sommets, et désignons par α, β, γ les points où ces droites rencontrent les côtés opposés A, B, C. On peut prendre pour les équations de ces trois droites

$(a\alpha)$ $\qquad B - C = 0,$

$(B\beta)$ $\qquad A - C = 0,$

$(C\gamma)$ $\qquad A - B = 0.$

Cela posé, on voit aisément qu'une conique qui pas-

sera par les points α, β, γ aura une équation de la forme (*)

$$aA^2 + bB^2 + cC^2$$
$$-(a+b)AB - (a+c)AC - (b+c)BC = 0,$$

a, b, c désignant des coefficients numériques arbitraires.

Cette conique rencontrera le côté A en un autre point α_1, et les côtés B et C en β_1 et γ_1. On obtiendra l'équation de la droite $A\alpha_1$ en faisant $A = 0$ dans l'équation de la conique. On trouve ainsi

Equat. de $(A\alpha_1)$	$Bb - Cc = 0,$
$(B\beta_1)$	$Aa - Cc = 0,$
$(C\gamma_1)$	$Aa - Bb = 0.$

Ces droites se coupent en un même point D_1.

La droite DD_1 aura pour équation

$$Aa(b-c) + Bb(c-a) + Cc(a-b) = 0 \quad (**).$$

On trouve encore, relativement à la conique :

Polaire du point D

$$A(b+c) + B(a+c) + C(a+b) = 0;$$

Polaire du point D_1

$$Aa^2(b+c) + Bb^2(a+c) + Cc^2(a+b) = 0.$$

(*) Car les coordonnés de α satisfont aux équations

$$B - C = 0, \quad A = 0,$$

et, par conséquent, à l'équation de la conique; de même pour β et γ.

TM.

(**) Si dans cette équation on fait

$$A = B = C,$$

elle est satisfaite, donc le point D est sur cette droite; elle est encore satisfaite en posant

$$Aa = Bb = Cc;$$

donc le point D_1 est sur la droite. TM.

Prenons sur le côté BC opposé à l'angle A deux points a, a_1 qui soient conjugués harmoniques par rapport aux points B et C et par rapport aux intersections α, α_1 de la conique avec le côté BC. Prenons sur le côté AB et AC deux couples de points analogues b, b_1 et c, c_1 (*).

On trouve facilement

Équat. de	(Aa)	$B\sqrt{b} - C\sqrt{c} = 0,$
	(Bb)	$A\sqrt{a} - C\sqrt{c} = 0,$
	(Cc)	$A\sqrt{a} - B\sqrt{b} = 0,$
	(Aa_1)	$B\sqrt{b} + C\sqrt{c} = 0,$
	(Bb_1)	$A\sqrt{a} + C\sqrt{c} = 0,$
	(Cc_1)	$A\sqrt{a} + B\sqrt{b} = 0.$

Ces équations montrent : 1° que les trois droites Aa, Bb, Cc se coupent en un même point ; 2° que les trois points a_1, b_1, c_1 sont sur une même droite qui a pour équation

$$A\sqrt{a} + B\sqrt{b} + C\sqrt{c} = 0.$$

Soient maintenant

$$R = \alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$
$$S = \alpha' A + \beta' B + \gamma' C = 0,$$

deux droites, la première rencontre le côté BC aux points r_1, la seconde rencontre ce même côté au point s_1 ; nous allons déterminer ces deux droites de manière que les points r_1, s_1, B, C, α, α_1 soient en involution, les points a et a_1 devant être les points doubles de l'involution. Il suffit d'après la manière dont les points a et a_1 ont été trouvés, d'exprimer que les quatre points a, r_1, a_1, s_1 sont en position harmonique.

Soit O le point d'intersection des droites R, S.

(*) Ne pas confondre a, b et c, points, avec a. b, etc., coefficients arbitraires. Tm.

Equat. de Oa $\quad R(\beta'\sqrt{c}+\gamma'\sqrt{b})-S(\beta\sqrt{c}+\gamma\sqrt{b})=0,$

Oa_1 $\quad R(\beta'\sqrt{c}-\gamma'\sqrt{b})+S(\gamma\sqrt{b}-\beta\sqrt{c})=0,$

et pour que ces droites soient conjuguées harmoniques relativement à OR et OS, il faudra qu'on ait

$$\beta\beta' c-\gamma\gamma' b=0.$$

Si les droites R, S doivent couper les deux autres côtés du triangle, de manière à satisfaire à des conditions analogues à celles qui ont lieu relativement au côté BC, on trouvera encore les deux relations

$$\beta\beta' a-\alpha\alpha' b=0,$$
$$\alpha\alpha' c-\gamma\gamma' a=0,$$

qui avec la première déterminent les quantités α', β', γ' au moyen de α, β, γ, de sorte que la droite S aura pour équation

$$\frac{\mathrm{A}a}{\alpha}+\frac{\mathrm{B}b}{\beta}+\frac{\mathrm{C}c}{\gamma}=0;$$

les quantités α, β, γ sont arbitraires, car la droite R est quelconque, mais elle détermine S.

Si dans les résultats précédents on fait $a=b=c=1$, la conique devient tangente aux trois côtés du triangle, et l'on a la solution des questions 368 et 369 de M. Cayley.

Les droites représentées par les équations

$$l_1=0,\quad l_2=0,$$
$$l_2+ml_1=0,\quad l_2+nl_1=0,\quad nl_2+m^2l_1=0$$

sont en involution.

$$l_2+ml_1=0$$

est l'équation de la droite double. (Brioschi.)

On pourrait encore, au moyen des équations précédentes, trouver facilement d'autres théorèmes; je n'en citerai qu'un :

Si l'on mène les droites $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\beta\alpha$ et que l'on cherche

les équations de ces droites, on trouve

$(\alpha\gamma)$ $$A - B + C = 0,$$
$(\gamma\beta)$ $$-A + B + C = 0,$$
$(\beta\alpha)$ $$A + B - C = 0;$$

et l'on voit tout de suite que les intersections de $\alpha\gamma$ et B, $\beta\gamma$ et A, $\alpha\beta$ et C sont sur la droite

$$L = A + B + C = 0.$$

Joignons aussi $\alpha_1\gamma_1$, $\gamma_1\beta_1$, $\beta_1\alpha_1$; on aura pour les équations de ces droites

$(\alpha_1\gamma_1)$ $$Aa - Bb + Cc = 0,$$
$(\gamma_1\beta_1)$ $$-Aa + Bb + Cc = 0,$$
$(\beta_1\alpha_1)$ $$Aa + Bb + Cc = 0,$$

et les points d'intersection de $\alpha_1\gamma_1$ et B, $\beta_1\gamma_1$ et A, $\alpha_1\beta_1$ et C sont sur la droite

$$L_1 = Aa + Bb + Cc = 0.$$

Si l'on se reporte à l'équation de la polaire du point D, on voit que les droites L et L_1 se coupent sur cette polaire, etc.

On pourra encore remarquer que si $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ représentaient des courbes d'ordre m, au lieu de droites, on obtiendrait des théorèmes analogues aux précédents (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 364

(voir p. 125);

PAR M. C. CORDES,

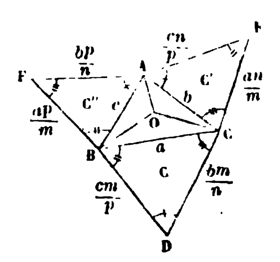
Élève de l'institution de Lasalle (classe de M. Beynac).

Trouver sur le plan d'un triangle ABC un point O

(*) Incessamment des solutions de MM. Brioschi et Cremona.

dont la position soit telle, que les circonférences passant par le point O et deux des sommets du triangle soient entre elles comme trois droites m, n, p données.

Désignons par C, C′, C″ les trois circonférences qui



comprennent a, b, c. Supposons qu'on veuille obtenir

$$\frac{C}{m}=\frac{C'}{n}=\frac{C''}{p}.$$

Sur a, b, c construisons les triangles BCD, ACE, ABF ayant respectivement pour côtés

$$\left[a,\ \frac{bm}{n},\ \frac{cm}{p}\right],\quad \left[\frac{an}{m},\ b,\ \frac{cn}{p}\right],\quad \left[\frac{ap}{m},\ \frac{bp}{n},\ c\right].$$

Le rapport de similitude pour les deux premiers est $\frac{m}{n}$, pour le premier et le troisième, ce rapport est $\frac{m}{p}$; ces rapports expriment aussi ceux des circonférences circonscrites aux mêmes triangles : on a donc

$$\frac{C}{m}=\frac{C'}{n}=\frac{C''}{p}.$$

Reste à prouver que C, C′, C″ se coupent en un même point. Soit O le point d'intersection de C et de C′. Les deux quadrilatères BOCD, AOCE étant inscrits, on a

$$BOA = 4^{dr} - (AOC + COB) = BDC + AEC$$

De la similitude des triangles BCD, ACE, on déduit

$$AEC = DBC,$$

par conséquent,

$$BOA = BDC + DBC,$$

ou

$$BOA = 2^{dr} - BCD.$$

Enfin de la similitude des triangles BCD, ABF, on tire

$$BCD = BFA,$$

donc

$$BOA = 2^{dr} - AFB,$$

et la circonférence C″ passe donc par le point O.

C. Q. F. D.

Lorque $m = n = p$, le point O est l'intersection des trois hauteurs du triangle ABC; car alors

$$A = D \quad \text{et} \quad BAC + BOC = 2^{dr},$$

théorème connu.

Note. 1°. En appliquant à cette construction la méthode des rayons vecteurs réciproques et prenant le point O pour pôle, on parvient à un beau théorème sur un triangle formé par des arcs d'hyperboles (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 227).

2°. Lorsque

$$C = \frac{C' \cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B} = \frac{C'' \cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} C},$$

le point O est le centre du cercle inscrit.

3°. Lorsque

$$C = \frac{C' \operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} B} = \frac{C'' \operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} C},$$

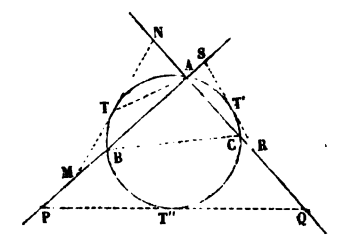
le point O est le centre du cercle circonscrit. TM.

SOLUTION DE LA QUESTION 367

(voir p 126),

PAR M. A. RAINBAUX.

Les côtés d'un angle droit inscrit dans une circonférence de cercle interceptent une demi-circonférence et sous-tendent deux arcs supplémentaires; on mène à chacun de ces trois arcs une tangente telle, que le point de contact soit au milieu de la portion de tangente interceptée entre les côtés de l'angle suffisamment prolongés. Démontrer que les trois points de contact sont les sommets d'un triangle équilatéral. (Sir F. POLLOCK.)



Soient BAC l'angle droit inscrit; MN, PQ, RS les trois tangentes; T, T′, T″ les trois points de contact, milieux respectifs des trois tangentes. A étant un angle droit, le triangle ATM est isocèle et l'on a

$$\text{angle TMA} = \text{angle TAM};$$

l'angle TMA a pour mesure arc $\frac{AT - BT}{2}$, et l'angle TAM a pour mesure arc $\frac{BT}{2}$; donc

$$AT - BT = BT, \quad BT = \frac{1}{2} AT \quad \text{et} \quad AT = \frac{2}{3} AB.$$

On démontre de même que

$$AT' = \frac{2}{3} AC;$$

donc

$$AT + AT = TT' = \frac{2}{3}(AB + BC) = \frac{2}{3} \cdot 180° = 120° :$$

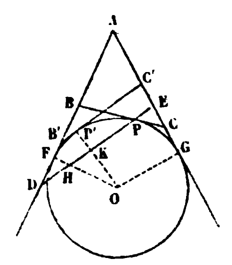
la corde TT' est donc le côté d'un triangle équilatéral inscrit; de même les cordes T'T", T"T (*). C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 363

(voir p. 125);

PAR M. G. COMMUNAL,
Élève de l'institution Loriol.

Mener par un point P donné dans l'intérieur d'un angle A une droite qui forme avec les côtés de l'angle un triangle dont le périmètre soit un minimum.



Je décris une circonférence tangente aux deux côtés de l'angle et passant par le point donné, et je dis que la tangente BC, menée par le point P à cette circonférence, est la droite demandée.

Il suffit de prouver que le périmètre du triangle ABC

(*) La construction effective exige la trisection de l'angle. TM.

est moindre que celui du triangle ADE, formé en menant par le point P une droite quelconque DE qui coupera l'un des rayons OF, OG non prolongé à l'autre côté du centre. Supposons qu'elle coupe le rayon OF en un point H, l'angle EHO sera aigu et la perpendiculaire OK sur DE ira couper la circonférence en un point P' situé sur l'arc FPG. Le périmètre du triangle ADE est évidemment plus grand que celui du triangle AB'C', déterminé en menant par le point P' une tangente à la circonférence. Or les périmètres des triangles ABC, AB'C' sont égaux. Donc le périmètre du triangle ADE est plus grand que celui du triangle ABC. C. Q. F. D.

Le problème donne deux solutions. Dans la seconde solution, on fait emploi du cercle inscrit dans le triangle ABC et donne un minimum pour $AB + AC - BC$. Ces solutions s'appliquent aussi au triangle sphérique.

Note. M. Louis Armez, élève du lycée Louis-le-Grand, a résolu la question de la même manière.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 363;

PAR MM. A. SYLVESTRE ET BOYELDIEU,
Elèves de M. Catalan.

Cette question se résout très-simplement par les principes de la méthode géométrique des maxima et des minima (*Des Méthodes en géométrie*, par M. Paul Serret, chap. IV).

Soit MB la droite qui donne le périmètre minimum dans le triangle AOB. Si nous considérons deux directions A_1B_1 et A_2B_2 infiniment voisines, les deux triangles correspondants A_1OB_1, A_2OB_2 peuvent être considérés comme *rigoureusement isopérimètres*. Or l'enveloppe du troi-

sième côté de tous les triangles isopérimètres dont deux côtés sont fixes est une circonférence de cercle, et quand les droites $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ tendent vers AB, cette circonférence tend à passer par le point M. Il suffit donc de faire passer par le point M une circonférence tangente aux deux côtés de l'angle et de lui mener une tangente en M. Ces deux constructions sont connues d'ailleurs.

La question peut se résoudre aussi analytiquement d'une manière très-simple en prenant pour variable l'angle $ABx = \alpha$ que fait AB avec OB prolongé. Si l'on désigne par θ l'angle donné, par a et b les coordonnées du point M, il vient

$$\cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{a}{a+b} \cos^2 \frac{1}{2} \theta.$$

Pour vérifier que cette formule résulte bien de la construction précédente, considérons le cas particulier où le point serait sur la bissectrice ; elle devient

$$\cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \frac{1}{2} \theta,$$

relation évidente d'après notre construction.

Note. Cette solution analytique est de M. Sylvestre.

M. Virieu, régent de Saumur, a adressé une solution par le calcul différentiel, et M. Rivet, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), une double solution géométrique et analytique bien détaillée.

NEUF THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE (*);

PAR M. P. DE LAFITTE.

I.

Dans deux figures homographiques, les trois points de

(*) A démontrer.

l'une (réels ou imaginaires) qui coïncident avec leurs homologues déterminent un cercle.

On joint les différents points de ce cercle considérés comme appartenant à la première figure avec leurs homologues dans la seconde; toutes les droites de jonction concourent en un même point S.

Ce point S est sur le cercle lui-même. Considéré comme appartenant à la seconde figure, il a son homologue S′ dans la première, et considéré comme appartenant à la première figure, il a son homologue S″ dans dans la seconde : le cercle des trois points passe par le point S′ et est tangent à la droite SS″.

II.

Dans deux figures homographiques, les trois droites de l'une qui coïncident avec leurs homologues déterminent un cercle inscrit au triangle formé par ces droites.

Les tangentes à ce cercle, considérées comme appartenant à la première figure, coupent leurs homologues sur une droite fixe L.

La droite L est tangente au même cercle. Considérée comme appartenant à la seconde figure, elle a son homologue L′ dans la première; considérée comme appartenant à la première, elle a son homologue L″ dans la seconde; le cercle est tangent à la droite L′ et passe au point d'intersection des droites L et L″.

(C'est le point de contact de L et du cercle.)

III.

Étant données deux figures homographiques sur un même plan, soient m, m', m'' les trois points qui coïncident avec leurs homologues.

1°. Si une conique est circonscrite au triangle m, m', m'', il existe sur la courbe deux points, et deux seule-

ment, tels, que deux droites tournant autour de ces points et se coupant sur la conique sont toujours homologues dans les deux figures.

2°. Si une conique est inscrite au même triangle, il existe deux tangentes à la conique, et deux seulement, telles, qu'une droite roulant sur la conique les rencontre en deux points toujours homologues dans les deux figures.

3°. Les deux propositions précédentes s'appliquent sans modifications à des coniques d'ailleurs quelconques.

IV.

On donne dans un même plan deux figures homographiques.

1°. Par un point m de la première qui coïncide avec son homologue, on mène une droite fixe A. Sur cette droite A on prend un point a. Les différentes droites de la première figure qui se coupent au point a rencontrent leurs homologues respectives en des points situés sur une conique, et à chaque point a de A correspond une telle conique.

Toutes ces coniques se touchent en un même point. Ce point de contact est le point m.

2°. Sur une droite M de la première figure qui coïncide avec son homologue, on prend un point fixe a. Par ce point on mène une droite A. Les droites menées des différents points de A à leurs homologues respectifs enveloppent une conique, et à chaque droite menée par le point fixe correspond une telle conique.

Toutes ces coniques se touchent en un même point. La tangente commune est la droite M.

Réciproquement, si les coniques relatives à deux points a, b se touchent, les points a, b sont en ligne droite avec un point double réel et le contact a lieu en ce point.

Si les coniques relatives à deux droites A, B se touchent, les droites A, B se coupent sur une droite double réelle et le contact a lieu sur cette droite.

IV (*bis*).

Dans deux figures homographiques quelconques situées dans un même plan, il existe toujours deux systèmes de deux droites homologues divisées en parties égales par leurs points homologues, et il n'en existe que *deux*.

Les deux droites de chaque figure sont parallèles à la droite de cette figure qui a pour homologue dans l'autre l'infini, et si deux points décrivent les deux droites d'une des figures *dans le même sens*, leurs homologues décriront les droites homologues en sens contraire (*).

V.

On suppose un triangle tel, que chaque sommet soit le pôle de la droite qui joint les deux autres relativement à un cercle (réel ou imaginaire).

Soient r^2 le carré du rayon; a^2, a'^2, a''^2 les carrés des cordes d'intersection des côtés du triangle et du cercle; t^2, t'^2, t''^2 les carrés des tangentes issues des trois sommets : on a, quel que soit le triangle, les deux relations

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{a''^2}=\frac{1}{2r^2},$$

$$\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t'^2}+\frac{1}{t''^2}=-\frac{1}{r^2}.$$

(*) Ce second système peut être utilisé pour représenter analytiquement deux figures *homologiques*, lorsque le centre d'homologie est sur l'axe d'homologie, cas auquel l'équation du n° 520 de la *Géométrie supérieure* devient illusoire. On peut substituer à cette équation une quelconque de celles du § III, chapitre VIII, a et a' étant les points où un rayon tournant autour du centre d'homologie rencontre les deux droites du second système, les deux droites du premier étant coïncidentes suivant l'axe d'homologie.

VI.

Par deux points donnés A, B, on peut faire passer une infinité de cercles. Deux droites quelconques issues du point A ou du point B, ou bien l'une du point A l'autre du point B, sont divisées par ces cercles en parties proportionnelles (*).

VII.

Étant donné un quadrilatère ABCD inscrit au cercle, du milieu du côté AB on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé CD; on fait la même chose pour les trois autres côtés. Du milieu de la diagonale AC, on abaisse une perpendiculaire sur l'autre diagonale; on fait la même chose pour cette seconde diagonale. Du point de concours des côtés AB et CD, on abaisse une perpendiculaire sur la droite qui joint leurs milieux; on fait la même chose pour les deux autres côtés opposés et pour les deux diagonales. Les neuf droites ainsi construites concourent en un même point.

VIII.

Soit un triangle ABC. Par le sommet A on mène une droite parallèle à la droite menée du centre G du cercle inscrit au triangle au milieu M de BC ; on prend sur cette parallèle

$$AI = 2GM,$$

les points I et G étant situés de part et d'autre de AM. La plus courte distance du point I au cercle circonscrit au triangle est double du rayon du cercle inscrit.

(*) Ce théorème donne le moyen de diviser deux droites en parties proportionnelles connaissant deux points conjugués ou homologues. Ce mode de division qui donne deux points conjugués *simultanément*, et non l'un au moyen de l'autre, donne une solution très-élémentaire, très-simple et très-générale du problème célèbre de la section de raison.

Les cercles exinscrits donnent des propositions analogues.

CONSIDÉRATIONS ANALYTIQUES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. J. MENTION (*).

La solution de certains problèmes sur les courbes et les surfaces du second ordre exige qu'on laisse aux axes coordonnés la plus grande généralité. Déjà pour les courbes le calcul est fort compliqué et même impossible sans le secours des relations d'identité entre les coefficients de l'équation, qui permettent d'y introduire les simplifications nécessaires. Dans ce cas, M. Terquem a donné des formules générales pour les équations et les coordonnées des droites et points remarquables. Je me propose d'indiquer le moyen de faire une chose semblable pour les surfaces du second ordre.

Parmi les applications de la méthode que je vais exposer, ce Mémoire contiendra des problèmes connus, mais traités avec une étendue complète, et aussi d'autres questions, nouvelles et intéressantes, dont l'examen ne semble pas praticable à l'aide de pures considérations géométriques. Plus tard, j'aurai à envisager les relations d'identité, indépendamment des surfaces, sous le point de vue de l'analyse indéterminée.

I.

NOTATIONS ET RELATIONS D'IDENTITÉ.

1. D'abord je crois bon de rappeler les identités prin-

(*) Maintenant professeur à Saint-Pétersbourg.

cipales qu'emploie la théorie des courbes du second ordre (*).

Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation hexanôme. Posons

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + (B^2 - 4AC)F,$$

$$m = B^2 - 4AC = \frac{dL}{dF},$$

$$k = 2AE - BD = \frac{dL}{dE}, \quad k' = 2CD - BE = \frac{dL}{dD},$$

$$l = D^2 - 4AF = \frac{dL}{dC}, \quad l' = E^2 - 4CF = \frac{dL}{dA},$$

$$n = DE - 2BF = -\frac{dL}{dB}.$$

m et L ne changent pas avec l'origine des coordonnées. On a les identités

$$k^2 - ml = 4AL, \quad 2kk' + 2mn = -4BL,$$

$$k'^2 - ml' = 4CL, \quad k'l + kn = 2DL,$$

$$kl' + k'n = 2EL, \quad n^2 - ll' = 4FL,$$

$$4L^2 = lk'^2 + l'k^2 + 2nkk' + m(n^2 - ll').$$

Maintenant je prends l'équation des surfaces du second ordre, suivant l'usage, sous la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. I, p. 490.

Je pose

$$L = A'A''C^2 + AA''C'^2 + AA'C''^2 - B^2C^2 - B'^2C'^2 - B''^2C''^2$$
$$- 2B''A''CC' - 2BAC''C' - 2B'A'CC''$$
$$+ 2BB'CC' + 2B'B''C''C' + 2BB''CC''$$
$$+ E(AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''),$$

$$m = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = \frac{dL}{dE},$$

$$k = CA'A'' - B^2C + C'BB' - C'B''A'' + C''BB'' - C''B'A' = \frac{dL}{d(2C)},$$

$$k' = C'AA'' - B'^2C' + C''B'B'' - C''BA + CBB' - CB''A'' = \frac{dL}{d(2C')},$$

$$k'' = C''AA' - B''^2C'' + CBB'' - CB'A' + C'B'B'' - C''BA = \frac{dL}{d(2C'')},$$

$$l = A''C'^2 + A'C''^2 - 2BC''C' + B^2E - EA'A'' = \frac{dL}{dA},$$

$$l' = A''C^2 + AC''^2 - 2B'CC'' + B'^2E - EAA'' = \frac{dL}{dA'},$$

$$l'' = A'C^2 + AC'^2 - 2B''CC' + B''E - EAA' = \frac{dL}{dA''},$$

$$n = BC^2 + AC''C' - B'CC' - B''CC'' - ABE + B'B''E = -\frac{dL}{d(2B)},$$

$$n' = B'C'^2 + A'CC'' - BCC' - B''C''C' - A'B'E + EBB'' = -\frac{L}{d(2B')},$$

$$n'' = B''C''^2 + A''CC' - B'C''C' - BCC'' - A''B''E + EBB' = -\frac{dL}{d(2B'')},$$

$$F' = Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y'$$
$$+ 2Cx' + 2C'y' + 2C''z' + E,$$

x', y', z' étant les coordonnées d'un point quelconque de l'espace. m et L ne changent pas avec l'origine

Résolvant en premier lieu l'équation par rapport à z,

on a

$$z = \frac{-(By + B'x + C'') \pm \sqrt{\begin{array}{l} y^2(B^2 - A'A'') + x^2(B'^2 - AA'') \\ + 2xy(BB' - A''B'') + 2y(BC'' - A'C \\ + 2x(B'C'' - A''C) + C''^2 - A''E \end{array}}}{2A''}.$$

Les fonctions k_1, k'_1, l_1, l'_1, n_1, m_1 relatives aux courbes du second degré entre les coefficients de la fonction hexanôme comprise sous le radical, seront égales aux fonctions correspondantes de l'équation décanôme multipliées par $4A''$: ainsi

$$L_1 = -4A''^2 L \; (*).$$

J'applique les identités connues, et je remarque qu'on pourrait résoudre par rapport à x ou y, ce qui me fournit le tableau ci-dessous :

$$\begin{aligned}
k^2 - ml &= -L(B^2 - A'A''),\\
k'^2 - ml' &= -L(B'^2 - AA''),\\
k''^2 - ml'' &= -L(B''^2 - AA'),\\
kk' + mn'' &= L(BB' - A''B''),\\
kk'' + mn' &= L(BB'' - A'B'),\\
k'k'' + m'n &= L(B'B'' - AB),\\
k'l + kn'' &= -L(B'C'' - A''C),\\
kl' + k'n'' &= -L(BC'' - A''C'),\\
kl'' + k''n' &= -L(BC' - A'C''),\\
k''l + kn' &= -L(B''C' - A'C),\\
k'l'' + k''n &= -L(B'C - AC''),\\
k''l' + k'n &= -L(B''C - AC'),
\end{aligned}$$

(*) Ainsi

$$k_1 = 4[(B^2 - A'A'')(B'C'' - A''C) - (BB' - A''B'')(BC'' - A''C')$$
$$= -4A''^2 K.$$

$$n''^2 - ll' = -L(C''^2 - A''E),$$
$$n'^2 - ll'' = -L(C'^2 - A'E),$$
$$n^2 - l'l'' = -L(C^2 - AE).$$

2. *Valeurs des coefficients de l'équation au moyen des identités.*

On a

$$(kk' + mn'')^2 - (k^2 - ml)(k'^2 - ml')$$
$$= L^2[(BB' - A''B'')^2 - (B^2 - A'A'')(B'^2 - AA'')] = L^2A''m,$$

d'où

$$A''L^2 = k^2l' + k'^2l + 2n''kk' + mn''^2 - mll'.$$

De même

$$(kk' + mn'')(kk'' + mn') - (k^2 - ml)(k'k'' + mn)$$
$$= L^2[(BB' - A''B'')(BB'' - A'B') - (B^2 - A'A'')(B'B'' - AB)]$$
$$= -L^2Bm,$$

d'où

$$BL^2 = n(k^2 - ml) - k'(kn' + k''l) - n''(kk'' + mn').$$

de même $B'L^2$, $B''L^2$.

Les valeurs de C, C', C'' se tirent des trois identités

$$Ak + B'k'' + B''k' + Cm = 0,$$
$$A'k' + Bk'' + B''k + C'm = 0,$$
$$A''k'' + B'k + Bk' + C''m = 0.$$

Quant à celle de E, on l'obtiendra par les identités

$$-Cl + C'n'' + C''n' = Ek,$$
$$Cn'' - C'l' + C''n = Ek',$$
$$Cn' + C'n'' - C''l'' = Ek''.$$

Enfin de

$$Ck + C'k' + C''k'' + mE = L,$$

on déduit L en fonction de k, k', k'', l,....

Nous pouvons donc former ce nouveau groupe de relations :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AL}^2 &= k'^2 l'' + k''^2 l' + 2nk'k'' + mn^2 - ml'l'', \\
\mathrm{A'L}^2 &= k^2 l'' + lk''^2 + 2n'kk'' + mn'^2 - mll'', \\
\mathrm{A''L}^2 &= k^2 l' + k'^2 l + 2n''kk' + mn''^2 - mll', \\
\mathrm{BL}^2 &= nk^2 - mnl - kk'n' - k'k''l - n''kk'' - mn'n'', \\
\mathrm{B'L}^2 &= n'k'^2 - mn'l' - k'k''n'' - k''kl' - nkk' - mnn'', \\
\mathrm{B''L}^2 &= n''k''^2 - mn''l'' - kk''n - kk'l'' - n'k'k'' - mnn', \\
\mathrm{CL}^2 &= l'l''k - n^2k + nn'k' + nn''k'' + k''l'n' + k'l''n'', \\
\mathrm{C'L}^2 &= ll'k' - n'^2k' + nn'k + n''l''k + n'n''k'' + lnk'', \\
\mathrm{C''L}^2 &= ll'k'' - n''^2k'' + nn''k + n'n''k' + kl'n' + k'ln, \\
\mathrm{EL}^2 &= 2nn'n'' + n''^2l'' + n'^2l' + n^2l - ll'l'', \\
\mathrm{L}^3 &= 2mnn'n'' + mn''^2l'' + mn'^2l' + mn^2l - mll'l'' \\
&\quad + 2kk'nn' + 2kk''nn'' + 2k'k''n'n'' - k'^2n'^2 \\
&\quad - k''^2n''^2 - k^2n^2 + 2nlk''k + 2n''l''kk' \\
&\quad + 2n'l'kk'' + ll''k'^2 + l'l''k^2 + ll'k'^2.
\end{aligned}
$$

Il existe un grand nombre d'autres identités : nous avons seulement donné les plus importantes. Par la suite, nous donnerons au fur et à mesure celles dont on aura besoin.

3. Il faut encore noter les deux relations suivantes :

1°. Du système d'équations

$$
\begin{aligned}
\alpha x^2 - 2\beta x + \gamma &= 0, \\
\alpha xy - \varepsilon x - \beta y + \xi &= 0, \\
\alpha y^2 - 2\varepsilon y + \pi &= 0,
\end{aligned}
$$

on conclut

$$\alpha\pi\gamma - \gamma\varepsilon^2 - \pi\beta^2 - \alpha\xi^2 + 2\beta\varepsilon\xi = 0.$$

2°. Si l'on a les six équations :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$
$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$
$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\beta\gamma + E\alpha\gamma + F\gamma^2 = 0,$$
$$A\alpha'^2 + B\alpha'\beta' + C\beta'^2 + D\beta'\gamma' + E\alpha'\gamma' + F\gamma'^2 = 0,$$
$$A\alpha''^2 + B\alpha''\beta'' + C\beta''^2 + D\beta''\gamma'' + E\alpha''\gamma'' + F\gamma''^2 = 0,$$

on a aussi

$$A + C + F = 0.$$

Démonstration. On peut évidemment supposer γ et γ', égaux à l'unité. Alors

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + 1 = 0,$$
$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + 1 = 0,$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + 1 = 0,$$
$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\beta + E\alpha + F = 0,$$

. . . .

Les trois premières équations donnent

$$\alpha = \sqrt{\frac{-(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')}{1+\beta'\beta''}},$$

$$\alpha' = \sqrt{\frac{-(1+\beta\beta')(1+\beta'\beta'')}{1+\beta\beta''}}$$

et

$$\alpha'' = \sqrt{\frac{-(1+\beta\beta'')(1+\beta'\beta'')}{1+\beta\beta'}}.$$

Remplaçant α par sa valeur dans la relation

$$C\beta^2 + A\alpha^2 + D\beta + F = -\alpha(B\beta + E),$$

il vient

$$C\beta^2(1+\beta'\beta'')-A(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')+D\beta(1+\beta'\beta'')$$
$$+F(1+\beta'\beta'')$$
$$=(B\beta+E)\sqrt{-(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')(1+\beta'\beta'')};$$

on a de même

$$C\beta'^2(1+\beta\beta'')-A(1+\beta\beta')(1+\beta'\beta'')+D\beta'(1+\beta\beta'')$$
$$+F(1+\beta\beta'')$$
$$=(B\beta'+E)\sqrt{-(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')(1+\beta'\beta'')}.$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre et supprimant le facteur $\beta-\beta'$, on obtient

$$C(\beta+\beta')+A\beta'\beta''\beta-C(1+\beta\beta')\beta''+D-F\beta''$$
$$=B\sqrt{-(1+\beta\beta')(1+\beta\beta'')(1+\beta'\beta'')},$$

et aussi par des moyens semblables

$$C(\beta+\beta'')+A\beta'\beta''\beta-C(1+\beta\beta'')\beta'+D-F\beta'$$
$$=B\sqrt{-(1+\beta\beta')\ldots}$$

Retranchant encore, on obtient

$$(\beta'-\beta'')(A+C+F)=0.$$

C. Q. F. D.

II.

DU PLAN TANGENT, DES AXES PRINCIPAUX. SECTIONS CIRCULAIRES.

1. Les coordonnées du centre de la surface sont $\frac{k}{m}$, $\frac{k'}{m}$, $\frac{k''}{m}$. En y transportant l'origine, l'équation de la surface prend la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=\frac{L}{m},$$

parce que

$$A k^2 + A' k'^2 + A'' k''^2 + 2B k'' k' + 2B' k'' k + 2B'' kk' + 2Ck + 2C' k' + 2C'' k'' + m^2 E = Lm.$$

Donc si $L = o$, la surface sera conique (*), et réciproquement.

La direction d'une corde principale étant représentée par $x = \mu z$, $y = \nu z$, on aura pour déterminer μ et ν les équations

$$\frac{A\mu + B' + B''\nu}{\mu + \nu \cos xy + \cos xz} = \frac{A'\nu + B + B''\mu}{\nu + \cos yz + \mu \cos xy} = \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \mu \cos zx + \nu \cos zy}.$$

Si l'on pose

$$A'' + B\nu + B'\mu = s(1 + \mu \cos zx + \nu \cos zy),$$

on parviendra, comme à l'ordinaire, à l'équation cubique

$$(s - A)(s - A')(s - A'') - (s - A')(s \cos zx - B')^2 - (s - A'')(s \cos xy - B'')^2 - (s - A)(s \cos yz - B)^2 + 2(s \cos zy - B)(s \cos zx - B')(s \cos xy - B'') = o,$$

ou

$$s^3(1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2 \cos xy \cos zx \cos zy)$$
$$- s^2 \left[\begin{array}{l} A \sin^2 yz + A' \sin^2 zx + A'' \sin^2 xy \\ - 2B'(\cos xz - \cos zy \cos xy) \\ - 2B''(\cos xy - \cos zy \cos zx) \\ - 2B(\cos yz - \cos xy \cos xz) \end{array}\right]$$
$$- s \left[\begin{array}{l} B^2 - A'A'' + B'^2 - AA'' + B''^2 - AA' \\ + 2\cos xy(A''B'' - BB') + 2\cos zy(AB - B'B'') \\ + 2\cos xz(A'B' - BB'') \end{array}\right]$$
$$+ AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = o.$$

(*) Ce cône est imaginaire lorsque le centre est à l'intérieur de la surface ; ellipsoïde. TM.

Il ne serait pas difficile de montrer que les racines de cette équation sont liées aux longueurs des axes ; mais j'obtiendrai par une autre voie l'équation ayant pour racines les carrés des demi-axes.

La marche que suit M. Leroy (*Analyse appliquée*, page 197) d'après M. Cauchy pour rechercher à quels caractères on peut reconnaître que la surface est de *révolution*, est sans contredit d'une extrême simplicité. Or rien n'empêche de la suivre avec des axes obliques. On arrive aux conditions

$$\frac{B}{\cos yz} = \frac{B'}{\cos xz} = \frac{B''}{\cos xy},$$

$$\frac{BA - B'B''}{\cos yz - \cos xz \cos xy} = \frac{B'A' - BB''}{\cos xz - \cos yz \cos xy} = \frac{B''A'' - BB'}{\cos xy - \cos xz \cos yz}.$$

Lorsque la corde, au lieu d'être principale, sera simplement conjuguée au plan

$$dy + ex + fz = 0,$$

μ et ν s'expriment comme il suit :

$$\mu = \frac{cf(BB'' - A'B') + ed(BB' - A''B'') - e^2(B^2 - A'A'')}{df(B'B'' - AB) + ef(BB'' - A'B') - f^2(B''^2 - AA')},$$

$$\nu = \frac{df(B'B'' - AB) + de(BB' - A''B'') - d^2(B'^2 - AA'')}{df(B'B'' - AB) + cf(BB'' - A'B') - f^2(B''^2 - AA')},$$

pour les paraboloïdes dans lesquels la droite

$$x = \frac{k}{k''}z, \quad y = \frac{k'}{k''}z$$

est parallèle à l'axe, on a

$$\mu = \frac{e}{f}\frac{k}{k''}, \quad \nu = \frac{d}{f}\frac{k'}{k''}.$$

2. Coupons la surface par le plan

$$dy + ex + fz + g = 0.$$

L'intersection aura pour projection sur le plan des xy la courbe

$$\begin{aligned} & y^2 (A' f^2 + A'' d^2 - 2 B df) \\ & + 2xy (B'' f^2 + A'' de - B ef - B' df) \\ & + x^2 (A f^2 + A'' e^2 - 2B' ef) \\ & + 2y (A'' dg - Bgf + C' f^2 - C'' df) \\ & + 2x (A'' eg - B' gf - C'' ef + C f^2) \\ & + A'' g^2 - 2 C'' gf + E f^2 = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions m et L relatives à cette courbe sont

$$\begin{aligned} m_1 = {} & d^2 (B'^2 - AA'') + e^2 (B^2 - A'A'') + f^2 (B''^2 - AA') \\ & + 2 de (A''B'' - BB') + 2 ef (B' A' - BB'') \\ & + 2 df (AB - B' B''), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 = {} & le^2 + l' d^2 + l'' f^2 + 2 egk + 2 dgk' + 2 gfk'' \\ & + mg^2 - 2 dfn - 2 efn' - 2 den'', \end{aligned}$$

$l, l', l'', k, \ldots, n''$ ayant les significations fixés plus haut.

A l'aide de ces expressions, nous pourrions étudier les surfaces du second ordre et avoir leurs caractères spécifiques. Je supprime la discussion dont la place serait plutôt dans une théorie systématique des surfaces du second ordre, que je n'ai pas l'intention d'établir ici.

Quand la *section* se réduira à un point ou au système de deux droites, le plan sera tangent à la surface. Ainsi la relation

$$\begin{aligned} & mg^2 + le^2 + l' d^2 + l'' f^2 + 2 keg + 2 k' dg + 2 k'' gf \\ & \quad - 2 dfn - 2 efn' - 2 aen'' = 0 \end{aligned}$$

représente la condition nécessaire et suffisante (*) pour le

(*) Nécessaire, mais non suffisante ; le point de contact est imaginaire lorsque m_1 et L_1 sont négatifs. TM.

contact du plan

$$dy + ex + fz + g = 0$$

avec la surface du second ordre.

Si $l = 0$, ou $l' = 0$, ou $l'' = 0$, la surface touche un des plans coordonnés.

3. On aura les sections circulaires, en identifiant l'équation se rapportant à la section plane en général avec celle de la projection de l'intersection du plan

$$dy + ex + fz + g = 0$$

et de la sphère

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\\ &+ 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos xy + 2(x-\alpha)(z-\gamma)\cos xz\\ &+ 2(y-\beta)(z-\gamma)\cos yz = R^2.\end{aligned}$$

Cette projection ayant pour équation

$$\begin{aligned}&y^2(d^2 + f^2 - 2df\cos zy)\\ &+ 2xy(f^2\cos xy + de - ef\cos zy - df\cos xz)\\ &+ x^2(f^2 + e^2 - 2ef\cos xz)\\ &+ 2y[(\beta + \alpha\cos xy + \gamma\cos yz)f^2 - df(\gamma + \alpha\cos xz + \beta\cos yz)]\\ &+ 2x[(\alpha + \beta\cos xy + \gamma\cos xz)f^2 - ef(\gamma + \alpha\cos xz + \beta\cos yz)]\\ &+ f^2\begin{pmatrix}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\cos xy + 2\alpha\gamma\cos xz\\ + 2\beta\gamma\cos yz - R^2\end{pmatrix} = 0,\end{aligned}$$

il viendra en identifiant (p. 217)

$$\begin{aligned}&d^2 + f^2 - 2df\cos xy = (A'f^2 + A''d^2 - 2Bdf)\lambda,\\ &f^2\cos xy + de - ef\cos zy - df\cos xz\\ &\qquad = (B''f^2 + A''de - Bef - B'df)\lambda,\\ &f^2 + e^2 - 2ef\cos xz = (Af^2 + A''e^2 - 2B'ef)\lambda,\end{aligned}$$

où λ est un facteur à déterminer.

De là on conclut

$$\frac{d^2}{f^2}(1-\lambda A'')+1-\lambda A'-\frac{2d}{f}(\cos zy-\lambda B)=0,$$

$$\cos yx-\lambda B''+\frac{d}{f}\frac{e}{f}(1-\lambda A'')-\frac{e}{f}(\cos zy-\lambda B)$$
$$-\frac{d}{f}(\cos xz-\lambda B')=0,$$

$$1-\lambda A+\frac{e^2}{f^2}(1-\lambda A'')-\frac{2e}{f}(\cos xz-\lambda B')=0.$$

Donc, en vertu d'une identité, on est conduit à cette équation du troisième degré en λ

$$(1-\lambda A)(1-\lambda A')(1-\lambda A'')-(1-\lambda A')(\cos xz-\lambda B')^2$$
$$-(1-\lambda A'')(\cos xy-\lambda B'')^2-(1-\lambda A)(\cos yz-\lambda B)^2$$
$$+2(\cos zy-\lambda B)(\cos xz-\lambda B')(\cos xy-\lambda B'')=0,$$

ou

$$\lambda^3(AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'')$$
$$-\lambda^2\left[\begin{array}{l}B^2-A'A''+B'^2-AA''+B''^2-AA'\\+2\cos xy(A''B''-BB')+2\cos zy(AB-B'B'')\\+2\cos zx(A'B'-BB'')\end{array}\right]$$
$$-\lambda\left[\begin{array}{l}A\sin^2 yz+A'\sin^2 xz+A''\sin^2 xy\\-2B'(\cos xz-\cos zy\cos xy)\\-2B''(\cos xy-\cos zy\cos zx)\\-2B(\cos yz-\cos xy\cos xz)\end{array}\right]$$
$$+1-\cos^2 xy-\cos^2 xz-\cos^2 yz+2\cos xy\cos xz\cos yz=0\ (^*).$$

Pour découvrir la signification géométrique de λ, transportons l'origine des coordonnées au centre de la surface, ce qui ne changera pas les coefficients de l'équation du troisième degré, et imaginons que la sphère soit concentrique à la surface. Un raisonnement direct apprend

(*) Cette dernière expression est le volume du parallélipipède qu'on obtient en prenant à partir de l'origine une longueur égale à l'unité sur les trois axes. TM.

(*voyez* les *Développements de Géométrie* de M. Charles Dupin, page 168) qu'il y a deux sections circulaires ayant pour centre celui de la surface et pour rayon la longueur de l'axe moyen. Mais l'identification fournit

$$\lambda E = -R^2;$$

et, l'origine des cooordonnées étant au centre,

$$E = \frac{L}{m}.$$

Donc le carré de l'axe moyen sera racine de l'équation du troisième degré dont l'inconnue deviendrait $-\lambda\frac{L}{m}$. On voit de même à priori que les sphères concentriques à la surface et ayant pour rayons les longueurs des axes extrêmes, coupées par leurs plans correspondants, donneraient des cercles ne pouvant appartenir à la surface du second ordre, quoique λ reste toujours réel. Conséquemment, le calcul, qui n'admettait aucune différence entre ces divers cas, doit faire trouver les trois valeurs de λ correspondantes aux axes principaux, et l'équation dont l'inconnue est $-\lambda\frac{L}{m}$ a bien pour racines les carrés des demi-axes.

Notre déduction s'accorde, au surplus, avec l'énoncé qu'on lit à la page 399, des *Propriétés projectives*.

Ainsi l'équation aux carrés des demi-axes dans le cas le plus général sera

$$\lambda_1^3 + \lambda_1^2 \frac{L}{m^2}[\Sigma(B^2 - A'A'') + \Sigma 2\cos xy(A''B'' - BB')]$$

$$-\lambda_1\frac{L^2}{m^3}[\Sigma A\sin^2 yz - \Sigma 2B(\cos yz - \cos xy\cos xz)]$$

$$-\frac{L^3}{m^4}(1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz$$

$$+ 2\cos xy\cos xz\cos zy) = 0.$$

On trouve cette équation dans un Mémoire de M. Bé-

rard (*Annales* de Gergonne, t. III) où elle paraît avoir été peu remarquée (*).

4. Problème. *Étant donnée l'équation d'un plan, calculer les coordonnées de son pôle.*

L'équation générale du plan polaire d'un point (x, y, z) étant

$$X(Ax + B'z + B''y + C) + Y(A'y + Bx + B''z + C')$$
$$+ Z(A''z + By + B'x + C'') + Cx + C'y + C''z + E = 0,$$

si

$$dY + eX + fZ + g = 0$$

est l'équation du plan dont on cherche le pôle, les coordonnées de celui-ci satisferont aux trois équations

$$x(Ag - Ce) + y(B''g - C'e) + z(B'g - C''e) = Ee - Cg,$$
$$x(B''g - Cd) + y(A'g - C'd) + z(Bg - C''d) = Ed - C'g,$$
$$x(B'g - Cf) + y(Bg - C'f) + z(A''g - C''f) = Ef - C''g;$$

d'où l'on tire ces valeurs de x, y, z :

$$x = \frac{el + gk - dn'' - fn'}{mg + ek + dk' + fk''},$$
$$y = \frac{dl' + gk' - en'' - fn}{mg + ek + dk' + fk''},$$
$$z = \frac{fl'' + gk'' - dn' - en}{mg + ek + dk' + fk''}.$$

lorsque x, y, z sont donnés, on déduit $\frac{d}{g}$, $\frac{e}{g}$, $\frac{f}{g}$.

III.

DES GÉNÉRATRICES RECTILIGNES ET DU CÔNE CIRCONSCRIT.

1. Soient

$$x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta$$

(*) M. de Saint-Guilhem (*Journal de Mathématiques*, t. I, p. 318) et M. Lebesgue (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 406) l'ont aussi donnée.

les équations d'une génératrice rectiligne. Alors on a

$$m\beta^2 + 2\alpha\beta k'' + l''\alpha^2 - 2\beta k + 2\alpha n' + l = 0,$$
$$m\delta^2 + 2\gamma\delta k'' + l''\gamma^2 - 2\delta k' + 2\gamma n + l' = 0,$$

relations qui renferment tous les résultats connus. Je remarque seulement que le cas particulier du cône entraîne l'égalité $L = 0$.

Ensuite les coefficients α et γ dépendent l'un de l'autre d'après cette troisième relation

$$A\alpha^2 + A'\gamma^2 + 2B\gamma + 2B'\alpha + 2B''\alpha\gamma + A'' = 0,$$

d'où

$$\gamma = \frac{-(B + B''\alpha) \pm \sqrt{B^2 - A'A'' + (BB'' - A'B')\alpha + \alpha^2(B''^2 - AA')}}{A'}.$$

Or pour $m = 0$, la quantité sous le radical est un carré parfait, donc alors

$$\gamma = i\alpha + p,$$

$$i = \frac{\pm\sqrt{B''^2 - AA'} - B''}{A'} = \frac{\dfrac{+k''}{\sqrt{-L}} - B''}{A'},$$

$$p = \frac{\pm\dfrac{A'B' - BB''}{2\sqrt{B''^2 - AA'}} - B}{A'} = \frac{\pm\dfrac{k\sqrt{-L}}{k''} - B}{A'}.$$

Par conséquent, il y a deux séries de génératrices rectilignes parallèles aux deux plans

$$y = ix + pz$$

respectivement.

2. Soit

$$dy + ex + fz = dy' + ex' + fz'$$

l'équation d'un plan tangent à la surface et passant par le point x', y', z'. En substituant à g la valeur

$$-(dy' + ex' + fz')$$

dans la relation de contact, celle-ci devient (p. 217)

$$\frac{d^2}{f^2}(my'^2 - 2k'y' + l') - \frac{2d}{f}\frac{e}{f}(ky' + k'x' + n'' - mx'y')$$

$$+\frac{c^2}{f^2}(mx'^2 - 2kx' + l) - \frac{2d}{f}(k'x' + k''y' + n - my'z')$$

$$-\frac{2e}{f}(kz' + k''x' + n' - mz'x') + mz'^2 - 2k''z' + l'' = 0.$$

Il faut en calculer les déterminants m_1 et L_1.

1°.

$$m_1 = y'^2(k^2 - ml) - 2x'y'(kk' + mn'') + x'^2(k'^2 + ml')$$
$$+ 2y'(kn'' + k'l) + 2x'(k'n'' + kl') + n''^2 - ll'$$
$$= -L\left[\begin{array}{l} y'^2(B^2 - A'A'') + x'^2(B'^2 - AA'') \\ + 2x'y'(BB' - A''B'') + 2y'(BC'' - A''C') \\ + 2x'(B'C'' - A''C) + C''^2 - A''E \end{array}\right]$$
$$= -L[(A''z' + By' + B'x' + C'')^2 - A''F'].$$

2°.

$$L_1 = 4\left\{\begin{array}{l} (my'^2 - 2k'y' + l') \\ \times(kz' + k''x' + n' - mz'x')^2 \\ + 2(ky' + k'x' + n'' - mx'y') \\ \times(k'z' + k''y' + n - my'z') \\ \times(kz' + k''x' + n' - mz'x') \\ + (mx'^2 - 2kx' + l) \\ \times(k'z' + k''y' + n - my'z')^2 \\ + \left[\begin{array}{l} y'^2(k^2 - ml) \\ - 2x'y'(kk' + mn'') \\ + x'^2(k'^2 - ml') + 2y'(kn'' + k'l) \\ + 2x'(k'n'' + kl') + n''^2 - ll' \end{array}\right] \\ \times(mz'^2 - 2k'z' + l'') \end{array}\right\} = 4L^2F' \text{ (*)}.$$

(*) Lorsque m_1 et F' sont négatifs, le point x', y', z' est intérieur. Lorsque m_1 et F' sont de signes différents ou tous deux positifs, le point est extérieur. TM.

Pour $L = 0$, cas du cône, l'équation entre $\frac{d}{f}$ et $\frac{e}{f}$ se décompose en deux facteurs du premier degré, ce qui doit être.

3. *Équation du cône circonscrit.* Il faut chercher la surface enveloppe du plan

$$d(y - y') + e(x - x') + f(z - z') = 0,$$

$\frac{d}{f}$, $\frac{e}{f}$ satisfaisant à l'équation du second degré trouvée ci-dessus (p. 223). Voici le résultat, en appelant m_1, l_1, $k_1, \ldots, n_1$ les fonctions d'identité relatives à cette équation

$$\begin{aligned} &m_1(z - z')^2 + 2(y - y')(z - z')k'_1 \\ &+ 2(z - z')(x - x')k_1 + l'_1(y - y')^2 \\ &+ l_1(x - x')^2 - 2n_1(y - y')(x - x') = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &l_1 x^2 + l'_1 y^2 + m_1 z^2 + 2k'_1 yz + 2k_1 zx - 2n_1 yx \\ &\quad - 2x(k_1 z' + l_1 x' - n_1 y') - 2y(k'_1 z' + l_1 y' - n_1 x') \\ &\quad - 2z(m_1 z' + k'_1 y' + k_1 x') + m_1 z'^2 + 2k'_1 y' z' \\ &\quad + 2k_1 z' x' \mp l'_1 y'^2 + l_1 x'^2 - 2n_1 x' y' = 0. \end{aligned}$$

Cône asymptotique. Ici

$$x' = \frac{k}{m}, \quad y' = \frac{k'}{m}, \quad z' = \frac{k''}{m}.$$

L'équation du cône asymptote, par des réductions faciles au moyen des relations d'identité, est finalement

$$\begin{aligned} &A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2B yz + 2B' xz + 2B'' xy \\ &\quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = \frac{L}{m}. \end{aligned}$$

4. Problème. *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une surface du second degré.*

Soient

$$dy + ex + fz + g = 0,$$
$$d'y + e'x + f'z + g' = 0,$$
$$d''y + e''x + f''z + g'' = 0,$$

les équations de trois plans tangents à une surface du second degré et se coupant à angle droit. Les axes étant rectangulaires, on a

$$dd' + ee' + ff' = 0,$$
$$dd'' + ee'' + ff'' = 0,$$
$$d'd'' + e'e'' + f'f'' = 0,$$

et de plus (p. 223)

$$\begin{aligned} & d^2(my'^2 - 2k'y' + l') \\ & - 2de(ky' + k'x' + n'' - mx'y') \\ & + e^2(mx'^2 - 2k'x' + l) \\ & - 2df(k'z' + k''y' + n - my'z') \\ & - 2ef(kz' + k''x' + n' - mz'x') \\ & + (mz'^2 - k''z' + l'')fz = 0, \end{aligned}$$

ainsi que deux autres équations analogues en d', e', f', d'', etc., où x', y', z' sont les coordonnées du point de concours des trois plans. Donc, d'après une identité précédemment démontrée (p. 213),

$$\begin{aligned} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2k'y' - 2kx' - 2k''z' \\ + l + l' + l'' = 0. \end{aligned}$$

C'est l'équation d'une sphère ayant même centre que la surface et pour carré de son rayon la somme algébrique des carrés des demi-axes.

Poisson, qui a résolu ce problème dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (*), a laissé de côté le

---

(*) *Voir* t. V, page 670.

cas des deux paraboloïdes pour lesquels le lieu est

$$2kx' + 2k'y' + 2k''z'' = l + l' + l'',$$

c'est-à-dire un plan perpendiculaire à l'axe.

Plus bas, j'aurai besoin de l'équation du lieu actuel en coordonnées obliques. Il m'a paru difficile de l'obtenir directement. En effet, la condition de perpendicularité devenant alors

$$\begin{aligned} & ee' \sin^2 yz + dd' \sin^2 xz + ff' \sin^2 xy \\ & - (\cos xy - \cos zy \cos zx)(d'e + de') \\ & - (\cos yz - \cos zx \cos xy)(d'f + df') \\ & - (\cos zx - \cos xy \cos yz)(ef' + e'f) = 0, \end{aligned}$$

l'identité analogue à celle qui vient de nous servir serait bien plus compliquée. J'ai donc préféré déduire cette équation générale de l'hypothèse où les axes étaient rectangulaires ; on obtient ainsi immédiatement

$$\begin{aligned} & mx'^2 + my'^2 + mz'^2 + 2mx'y' \cos xy + 2my'z' \cos yz \\ & + 2mx'z' \cos xz - 2x'(k + k' \cos xy + k'' \cos zx) \\ & - 2y'(k' + k \cos xy + k'' \cos yz) \\ & - 2z'(k'' + k' \cos yz + k \cos xz) + l + l' + l'' \\ & - 2n \cos yz - 2n' \cos xz - 2n'' \cos xy = 0, \end{aligned}$$

et pour $m = 0$,

$$\begin{aligned} & y'(k' + k \cos xy + k'' \cos yz) \\ & + x'(k + k' \cos xy + k'' \cos zx) \\ & + z'(k'' + k' \cos yz + k \cos zx) \\ & + n \cos yz + n' \cos xz + n'' \cos xy - \frac{l + l' + l''}{2} = 0. \end{aligned}$$

IV.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

1. Trouver le lieu des centres des surfaces du second

ordre assujetties à toucher sept plans donnés de position.

Prenons trois des plans pour plans coordonnés : alors

$$l = l' = l'' = 0.$$

Soient

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1,$$

$$\frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} + \frac{z}{c''} = 1,$$

$$\frac{x}{a'''} + \frac{y}{b'''} = \frac{z}{c'''} = 1,$$

les équations des quatre autres plans.

Nous aurons successivement, par la condition de tangence (p. 217),

$$\frac{an}{m} + \frac{bn'}{m} + \frac{cn''}{m} = bcx + acy + abz - \frac{abc}{2},$$

$$\frac{a'n}{m} + \frac{b'n'}{m} + \frac{c'n''}{m} = b'c'x + a'c'y + a'b'z - \frac{a'b'c'}{2},$$

$$\frac{a''n}{m} + \frac{b''n'}{m} + \frac{c''n''}{m} = b''c''x + a''c''y + a''b''z - \frac{a''b''c''}{2},$$

$$\frac{a'''n}{m} + \frac{b'''n'}{m} + \frac{c'''n''}{m} = b'''c'''x + a'''c'''y + a'''b'''z - \frac{a'''b'''c'''}{2},$$

où x, y, z désignent les coordonnées du centre de la surface variable. Il y a donc entre les quantités $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m}$, $\frac{n''}{m}$ quatre équations du premier degré ; par conséquent, les seconds membres de ces équations seront liés entre eux

par une relation linéaire, c'est-à-dire que le lieu géométrique cherché est un plan.

Corollaire I. Les centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à huit plans appartiendront à une droite, intersection des huit plans qu'on obtiendrait en combinant les proposés sept à sept.

Corollaire II. Le centre de la surface tangente à neuf plans sera donc sur neuf droites.

2. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont la somme algébrique des carrés des axes soient donnée.

Prenons encore trois des plans pour plans des coordonnées. Nous aurons d'abord, comme ci-dessus,

$$\frac{an}{m}+\frac{bn'}{m}+\frac{cn''}{m}=bcx+acy+abz-\frac{abc}{2},$$

$$\frac{a'n}{m}+\frac{b'n'}{m}+\frac{c'n''}{m}=b'c'x+a'c'y+a'b'z-\frac{a'b'c'}{2},$$

$$\frac{a''n}{m}+\frac{b''n'}{m}+\frac{c''n''}{m}=b''c''x+a''c''y+a''b''z-\frac{a''b''c''}{2}.$$

Puis, appelant ψ^2 la somme des carrés des demi-axes qui est donnée, on obtient (p. 209)

$$-\frac{L}{m^2}\left[\begin{array}{l} B^2-A'A''+B'^2-AA''+B''^2-AA' \\ +2\cos xy\,(A''B''-BB') \\ +2\cos zy\,(AB-B'B'') \\ +2\cos xz\,(A'B'-BB'') \end{array}\right]=\psi^2,$$

équation qui se transforme par les *identités* (p. 209) en

$$\frac{k^2}{m^2}+\frac{k'^2}{m^2}+\frac{k''^2}{m^2}+2\cos xy\left(\frac{kk'}{m^2}+\frac{n''}{m}\right)$$
$$+2\cos zy\left(\frac{k'k''}{m^2}+\frac{n}{m}\right)+2\cos xz\left(\frac{k'k''}{m^2}+\frac{n'}{m}\right)=\psi^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\cos xy\left(xy + \frac{n''}{m}\right)$$
$$+ 2\cos zy\left(zy + \frac{n}{m}\right) + 2\cos zx\left(xz + \frac{n'}{m}\right) = \psi^2.$$

Or $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m}$, $\frac{n''}{m}$ s'expriment au moyen des trois équations précédentes linéairement en x, y, z. Donc le lieu géométrique est une sphère.

La position de son centre est indépendante du carré donné. En effet, soient

$$\frac{n}{m} = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$
$$\frac{n'}{m} = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',$$
$$\frac{n''}{m} = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'',$$

α, β, γ,..., γ'' étant des fonctions de a, b, c, etc.

Le centre de la sphère sera au point de rencontre des plans

$$x + y\cos xy + z\cos xz + \alpha\cos zy + \alpha'\cos xz + \alpha''\cos xy = 0,$$
$$y + x\cos xy + z\cos yz + \beta\cos zy + \beta'\cos xz + \beta''\cos xy = 0,$$
$$z + y\cos yz + x\cos xz + \gamma\cos zy + \gamma'\cos xz + \gamma''\cos xy = 0.$$

Remarque. Si l'on se proposait de construire des surfaces du second ordre tangentes à sept plans et dont la somme algébrique des carrés des axes fût donnée, il y aurait sept sphères devant renfermer leurs centres. Mais, d'autre part, ces centres appartiennent à un plan; ainsi généralement tous les groupes de sept sphères qui découleront des différentes valeurs du carré ψ^2 auront un même *plan radical*. Pour une surface tangente à huit plans et dont la somme des carrés des axes serait connue, le centre serait à l'intersection d'une droite et des huit petits

cercles correspondants aux groupes de sept sphères qu'on obtiendrait en combinant les huit plans proposés sept à sept.

Du reste, abstraction faite de toute surface auxiliaire, on aperçoit sans peine la belle et difficile étude géométrique qui résulterait de la combinaison du système de six, sept ou huit plans avec le système de sphères provenant du second lieu ci-dessus traité et qu'on ne connaissait pas encore, que je sache. Il faudrait, pour se livrer à cette étude, fixer nettement la position du centre de la sphère par rapport aux six plans : problème plus ardu que son analogue en géométrie plane. Car dans celui-ci, où l'on détermine le lieu des centres des coniques tangentes à trois droites et dont la somme algébrique des carrés des axes est connue, le centre du lieu (qui est un cercle) coïncide précisément avec le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois droites (*). Au contraire, rien n'est trouvé sur la figure formée par six plans quelconques.

3. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont les produits deux à deux des carrés des axes ont une somme donnée.

Ici la quatrième relation entre $\frac{n}{m}$; $\frac{n'}{m}$, $\frac{n''}{m}$ se conclura de l'équation (p. 220)

$$-\frac{L_2}{m^3}\left[\begin{array}{l} A\sin^2 yz + A'\sin^2 xz + A''\sin^2 xy \\ -2B'(\cos xz - \cos xy\cos zy) \\ -2B''(\cos xy - \cos zy\cos zx) \\ -2B(\cos yz - \cos xy\cos xz) \end{array}\right] = \psi^4,$$

ψ étant une ligne connue.

(*) Je possède depuis longtemps un moyen géométrique d'obtenir ce lieu.

Les identités fournissent

$$\frac{AL^2}{m^3} = \frac{2n}{m}\frac{k'}{m}\frac{k''}{m} + \frac{n^2}{m^2},$$

$$\frac{A'L^2}{m^3} = \frac{2n'}{m}\frac{k}{m}\frac{k''}{m} + \frac{n'^2}{m^2},$$

$$\frac{A''L^2}{m^3} = \frac{2n''}{m}\frac{k}{m}\frac{k'}{m} + \frac{n''^2}{m^2},$$

$$\frac{BL^2}{m^3} = \frac{n}{m}\frac{k^2}{m^2} - \frac{k'}{m}\frac{k}{m}\frac{n'}{m} - \frac{n''}{m}\frac{k}{m}\frac{k''}{m} - \frac{n'}{m}\frac{n''}{m}\ldots$$

....

Tous ces coefficients contiendront donc x, y z au troisième degré, et ce sera le degré de la surface, lieu des centres.

4. Trouver le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à six plans et dont le produit des axes est donné.

Nous avons, dans ce cas, pour quatrième relation entre $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m}$, $\frac{n''}{m}$ et x, y, z (p. 220) :

$$\frac{L^3}{m^4}\left(\begin{matrix} 1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz \\ + 2\cos xy \cos xz \cos yz \end{matrix}\right) = \psi^2.$$

On a (*voir* les *identités*)

$$\frac{L^3}{m^4} = \frac{2n}{m}\frac{n'}{m}\frac{n''}{m} + \frac{2k}{m}\frac{k'}{m}\frac{n}{m}\frac{n'}{m} + \frac{2k}{m}\frac{k''}{m}\frac{n}{m}\frac{n''}{m} + \frac{2k'}{m}\frac{k''}{m}\frac{n'}{m}\frac{n''}{m}$$
$$- \frac{k^2}{m^2}\frac{n^2}{m^2} - \frac{k'^2}{m^2}\frac{n'^2}{m^2} - \frac{k''^2}{m^2}\frac{n''^2}{m^2}.$$

On voit clairement que le lieu est une surface du quatrième degré.

Observation. Il résulte des trois lieux précédents qu'on

peut construire au plus vingt-quatre surfaces du second ordre tangentes à six plans et égales à une surface donnée. Et le théorème analogue à celui de M. Steiner en géométrie plane s'énoncera ainsi :

THÉORÈME. *Les vingt-quatre surfaces du second ordre tangentes à six plans et égales en volume ont leurs centres sur une même sphère.*

5. Tous les pôles d'un plan fixe par rapport aux surfaces du second ordre tangentes à sept plans appartiennent à un plan. C'est une conséquence des formules trouvées § II, n° 4. Et les pôles d'un même plan par rapport aux surfaces tangentes à huit plans seront sur une droite.

En particulier, le point de contact de la surface variable avec chaque plan décrira une droite. De sorte que les points de contact respectifs de la surface assujettie à toucher neuf plans donnés seront situés chacun sur huit droites.

6. THÉORÈME. *Tous les plans d'où l'on voit sous un trièdre trirectangle les paraboloïdes tangents à six plans donnés concourent en un même point.*

Un quelconque de ces plans a pour équation (p. 226)

$$\begin{aligned} &y(k' + k\cos xy + k''\cos zy)\\ &+ x(k + k'\cos xy + k''\cos zx)\\ &+ z(k'' + k'\cos zy + k\cos zx)\\ &+ n\cos yz + n'\cos xz + n''\cos xy = 0. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} n &= \alpha k + \beta k' + \gamma k'',\\ n' &= \alpha' k + \beta' k' + \gamma' k'',\\ n'' &= \alpha'' k + \beta'' k' + \gamma'' k'', \end{aligned}$$

α, β, γ,..., γ'' étant des nombres donnés. Dès lors l'é-

quation précédente pourra s'écrire

$$k\left(\begin{array}{c} y\cos xy + x + z\cos zx \\ + \alpha\cos zy + \alpha'\cos zx + \alpha''\cos xy \end{array}\right)$$
$$+ k'\left(\begin{array}{c} y + x\cos xy + z\cos yz \\ + \beta\cos zy + \beta'\cos zx + \beta''\cos xy \end{array}\right)$$
$$+ k''\left(\begin{array}{c} z + y\cos yz + x\cos xz \\ + \gamma\cos zy + \gamma'\cos xz + \gamma''\cos xy \end{array}\right) = 0;$$

et il est évident que le plan variable passera constamment par le point dont les coordonnées résultent des trois équations

$$y\cos xy + x + z\cos zx + \alpha\cos zy + \alpha'\cos zx + \alpha''\cos xy = 0,$$
$$y + x\cos xy + z\cos yz + \beta\cos zy + \beta'\cos zx + \beta''\cos xy = 0,$$
$$z + y\cos yz + x\cos zx + \gamma\cos zy + \gamma'\cos zx + \gamma''\cos xy = 0.$$

Or le centre de la sphère traitée n° 2 devait aussi y satisfaire. Donc le point de concours n'est autre que le centre de cette sphère.

Corollaires. Les plans d'où l'on verrait sous un trièdre trirectangle les paraboloïdes tangents à sept plans renfermeront les points de concours qu'on aurait en combinant les plans proposés six à six. Cela ne se pourra que si tous ces points sont situés sur une même droite qui sera perpendiculaire au plan, lieu des centres.

Ainsi nous retombons sur le théorème relatif au plan radical commun des sphères qui ont été définies plus haut (p. 229).

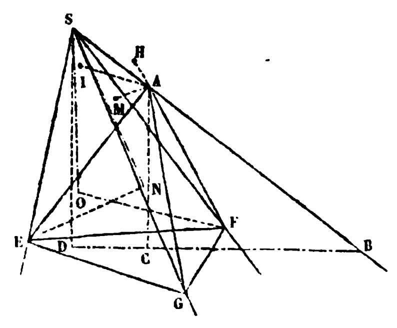
Enfin le plan d'où l'on verrait sous un trièdre trirectangle le paraboloïde tangent à huit plans est perpendiculaire à la droite, lieu des centres, qui est un diamètre de ce paraboloïde.

SOLUTION DE LA QUESTION 361

(voir t. XVI, p. 58);

PAR M. MARECHAL,
Élève de l'institution Loriol.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B on mène un plan quelconque détermi-



nant un tétraèdre T, de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T.

On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

Il faut prouver que la valeur de

$$\frac{\frac{1}{3}\text{EGF}\times\text{AC}\times\frac{1}{3}\text{SGF}\times\text{AM}\times\frac{1}{3}\text{SEG}\times\text{AI}\times\frac{1}{3}\text{SEF}\times\text{AH}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3\overline{\text{EGF}}^3\times\overline{\text{SD}}^3}$$

est une quantité constante.

Supprimant les facteurs communs constants, il reste à prouver que le rapport

$$\frac{AC \times SGF \times SEG \times SEF}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^3}$$

est constant.

Les deux droites SD et AC étant parallèles, le point C se trouvera sur BD. Les deux triangles semblables SDB, ACB donnent

$$\frac{AC}{SD} = \frac{AB}{SB},$$

d'où

$$AC = SD \times \frac{AB}{SB}.$$

Remplaçant dans le rapport précédent AC par sa valeur, ce rapport devient

$$\frac{SD \times \frac{AB}{SB} \times SGF \times SEF \times SEG}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^3}.$$

Supprimant le facteur commun et laissant de côté le facteur constant $\frac{AB}{SB}$, il reste à prouver que le rapport

$$\frac{SGF \times SEG \times SEF}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2}$$

est constant.

Or,

$$EGF \times SD = SGF \times EN,$$
$$EGF \times SD = SEG \times OF.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2 = SGF \times EN \times SEG \times OF.$$

Remplaçant dans le rapport précédent $\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2$ par sa

valeur, il devient

$$\frac{SGF \times SEG \times SEF}{SGF \times SEG \times EN \times OF},$$

et il reste à prouver que le rapport $\frac{SEF}{EN \times OF}$ est constant.

Or,

$$SEF = \frac{1}{2} SE \times SF \times \sin ESF;$$

$$EN = ES \times \cos SEN,$$

$$OF = FS \times \cos SFO.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, on trouve

$$EN \times OF = ES \times \cos SEN \times FS \times \cos SFO;$$

donc le rapport précédent devient

$$\frac{\frac{1}{2} SE \times SF \times \sin ESF}{ES \times SF \times \cos SEN \times \cos SFO}$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2} \sin ESF}{\cos SEN \times \cos SFO}.$$

Il suffit de prouver que ce rapport est constant, ce qui est évident, car les angles ESF, SEN, SFO sont constants.

Note. MM. Clery, Saintard, de Courcel, Dorlodot, Renaud, élèves du lycée Saint-Louis, Poupelet, institution Reuss, ont donné la même démonstration.

DÉMONSTRATION
D'une formule dont on peut déduire, comme cas particulier, le binôme de Newton.

Soient x, a, b *des quantités quelconques, et* m *un nombre* entier *et positif, on aura*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}(x+a)^m &= x^m + m.a(x+6)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}.a(a-26)(x+26)^{m-2}+\ldots\\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a(a-n6)^{n-1}(x+n6)^{m-n}+\ldots\\ &+ ma[a-(m-1)6]^{m-2}[x+(m-1)6]+a(a-m6)^{m-1}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule, que l'on doit à Abel (*), a été démontrée dans l'un des Traités d'Algèbre *conformes au programme officiel;* nous allons faire connaître une autre démonstration qui est, sauf quelques modifications de peu d'importance, celle qu'Abel a donnée.

Remarquons d'abord que l'égalité (1) est évidente quand $m = 1$, puisqu'elle se réduit alors à

$$x + a = x + a.$$

Elle est encore immédiatement vérifiée lorsque $m = 2$, car, dans ce cas, elle devient

$$(x+a)^2 = x^2 + 2a(x+6) + a(a-26) = x^2 + 2ax + a^2.$$

Il ne reste donc plus qu'à faire voir que si l'égalité (1) est vraie pour une certaine valeur particulière de m, elle existe encore lorsqu'on augmente cette valeur d'une unité. Ainsi, en supposant que m représente un nombre entier positif, pour lequel l'exactitude de l'égalité (1) ait été

(*) *Œuvres complètes*, t. I, p. 31.

constatée, il s'agit de prouver qu'on a

$$(2)\left\{\begin{aligned}&(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1)a(x+\beta)^m + \frac{(m+1)m}{1.2}a(a-2\beta)(x+2\beta)^{m-1} + \\ &\quad + \frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n+1} + \\ &\quad + (m+1)a(a-m\beta)^{m-1}(x+m\beta) + a[a-(m+1)\beta]^m.\end{aligned}\right.$$

Pour abréger l'écriture, nous désignerons par $f(x)$ le second membre de l'égalité (1) qui existe par hypothèse, et nous nommerons $\varphi(x)$ le second membre de l'égalité (2) qu'il s'agit d'établir.

En prenant les dérivées par rapport à x des deux fonctions $(x+a)^{m+1}$ et $\varphi(x)$, on trouve

$$(m+1)(x+a)^m \quad \text{et} \quad (m+1)f(x).$$

Mais

$$(x+a)^m = f(x),$$

par hypothèse : donc, les deux dérivées obtenues sont égales entre elles, et, par conséquent, les deux fonctions primitives $(x+a)^{m+1}$, $\varphi(x)$ ne peuvent différer que par une constante, c'est-à-dire qu'on a nécessairement l'égalité

$$(3) \qquad (x+a)^{m+1} = \varphi(x) + C,$$

en désignant par C une quantité indépendante de x.

Pour déterminer la valeur de la constante C, nous remarquerons que si l'on multiplie par $(m+1)\beta$, les termes x^m, $ma(x+\beta)^{m-1}$, etc., de $f(x)$, et qu'on ajoute respectivement aux produits résultant de ces multiplications les termes x^{m+1}, $(m+1)a(x+\beta)^m$, etc., de $\varphi(x)$, on obtiendra des sommes qui admettront chacune comme facteur le binôme $x+(m+1)\beta$. En effet on a

$$(m+1)\beta . x^m + x^{m+1} = x^m[x+(m+1)\beta];$$

et

$$m(m+1)\beta . a(x+\beta)^{m-1} + (m+1)a.(x+\beta)^{m}$$
$$= (m+1)a(x+\beta)^{m-1}[x+(m+1)\beta];$$

et, en général, la somme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}\times(m+1)\beta$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1).(m-n+2)}{1.2.3\ldots n} a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n+1}$$

est égale à

$$\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n} a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}[x+(m+1)\beta].$$

De cette remarque, nous concluons que si l'on multiplie par $(m+1)\beta$ les deux membres de l'égalité (1)

$$(x+a)^m = f(x)$$

et qu'on ajoute l'égalité qui en résulte

$$(m+1)\beta(x+a)^m = (m+1)\beta f(x),$$

membre à membre avec (3)

$$(x+a)^{m+1} = \varphi(x) + C,$$

on aura, en désignant par $\psi(x)$ un polynôme entier par rapport à x,

$$(m+1)\beta(x+a)^m + (x+a)^{m+1}$$
$$= \psi(x)\times[x+(m+1)\beta] + a[a-(m+1)\beta]^m + C;$$

ou, parce que

$$(m+1)\beta(x+a)^m + (x+a)^{m+1}$$
$$= [x+a+(m+1)\beta](x+a)^m,$$

on aura

$$(4)\left\{\begin{array}{l}[x+a+(m+1)\beta](x+a)^m \\ = \psi(x)\times[x+(m+1)\beta] + a[a-(m+1)\beta]^m + C.\end{array}\right.$$

Cela posé, si dans cette dernière égalité on remplace

x par $-(m+1)\beta$, il vient

$$a[a-(m+1)\beta]^m = a[a-(m+1)\beta]^m + C,$$

d'où

$$C = 0.$$

Par conséquent, on a

$$(x+a)^{m+1} = \varphi(x).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

En posant $\beta = 0$, la formule (1) donne le développement de la puissance m d'un binôme $(x+a)$.

Nous examinerons prochainement d'autres applications de cette formule. G.

SOLUTION DE LA QUESTION 279

(voir t. XII, p. 327);

PAR M. CHARLES MERAY (*).

Soient un triangle ABC, deux droites P, Q se coupant en F et rencontrant les droites AB, A'C respectivement en G et en K; menons par le point A une droite mobile Λ rencontrant les droites BC, P, Q respectivement en D, I, L. Inscrivons deux coniques, l'une dans le pentagone BDLFG et l'autre dans le pentagone CDIFK. En vertu du théorème de Brianchon, le point de contact de la première conique sur BC se trouve sur la droite qui joint le point F avec le point d'intersection m des deux droites GD, BL; de même le point de contact de la deuxième conique sur CD se trouve sur la droite Fm'. m' étant le point d'intersection des droites KD, CL, si l'on fait mouvoir Λ, les points D, L forment sur les droites BC et Q

(*) Aujourd'hui élève à l'École Normale.

deux divisions homographiques dont deux points homologues sont C, K; donc M' décrit une droite M, de même m en décrit une autre N; donc les faisceaux ayant pour centres F, K et formés par les droites telles que km' sont homographiques, ainsi que ceux ayant pour centres P et G et pour rayons les droites Gm, Fm. Mais les rayons GD, KD forment évidemment deux faisceaux homographiques; donc les rayons Fm, Fm' forment aussi deux faisceaux homographiques ayant même centre, les rayons doubles sont évidemment P, Q; donc le rapport anharmonique de P, Q, Fm, Fm' est constant: si le point F est le foyer des coniques et les droites P, Q les tangentes issues du foyer, on retombe sur le théorème de M. Stubbs.

Paris, 1854.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 332

(voir t. XV, p. 248, et t. XVI, p. 26);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques.

La démonstration du théorème énoncé est excessivement simple si l'on prend la fonction O sous la forme

$$X = X_1 X_2^2 \ldots X_k^k \ldots X_n^n,$$

X_k étant le produit des facteurs simples correspondants aux racines de degré de multiplicité k.

En effet,

$$\frac{dX}{dx} = X'_1 X_2^2 \ldots X_k^k \ldots X_n^n + 2X'_2 X_1 X_2 \ldots X_k^k \ldots X_n^n + \ldots$$

$$+ kX'_k X_1 X_2^2 \ldots X_k^{k-1} \ldots X_k^k$$

$$+ \ldots + nX'_n X_1 X_2^2 \ldots X_k^k \ldots X_n^{n-1}.$$

Par conséquent

$$P = X_2 X_3^2 \ldots X_k^{k-1} \ldots X_n^{n-1},$$

$$Q = \frac{X}{P} = X_1 X_2 \ldots X_k \ldots X_n,$$

$$R = \frac{\frac{dX}{dx}}{P} = p_1 X'_1 + 2p_2 X'_2 + \ldots$$
$$+ kp_k X'_k + \ldots + np_n X'_n;$$

où l'on a posé

$$p_k = \frac{Q}{X_k};$$

c'est-à-dire que p_k renferme tous les facteurs X_1, X_2,..., X_n sauf le facteur X_k.

$$\frac{dQ}{dx} = p_1 X'_1 + p_2 X'_2 + \ldots + p_k X'_k + \ldots + p_n X'_n.$$

Donc

$$R - k\frac{dQ}{dx} = (1-k)p_1 X'_1 + (2-k)p_2 X'_2 + \ldots + (n-p_n)p_n X'_n;$$

le terme $p_k X_k'$ a disparu.

$\left(R - k\frac{dQ}{dx}\right)$ est donc divisible par X_k et ne l'est par aucune des fonctions X_1, X_2,..., X_n qui sont premières entre elles. Donc X_k est le plus grand commun diviseur des polynômes Q et $R - k\frac{dQ}{dx}$.

C'est la proposition énoncée.

SOLUTION DE LA QUESTION 334

(voir t. XV, p. 243, et t. XVI, p. 52);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques.

La construction indiquée dans cette question donne lieu à plusieurs identités analogues à celle qui est énoncée; ces identités sont toutes évidentes, si l'on remarque que

$$\begin{aligned} AOb &= aOB, \\ BOc &= bOC, \\ COa &= cOA; \end{aligned}$$

ce sont des angles opposés par le sommet.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 357 (MICHAEL ROBERTS)

(voir t. XVI, p. 57);

PAR M. L'ABBÉ P. SAUZE,
Professeur au collége libre de Mende (Lozère).

D'un point quelconque M, on mène à une conique E deux sécantes qui la coupent en A et B, en C et D.

Si l'on a

$$\frac{AB}{MA.MB} = \frac{CD}{MC.MD}, \tag{1}$$

toute conique E' ayant les mêmes foyers FF' que la première, sera coupée par les sécantes en des points A' et B', C' et D' tels, que l'on aura ainsi

$$\frac{A'B'}{MA'.MB'} = \frac{C'D'}{MC'.MD'}. \tag{2}$$

Prenons pour axes coordonnés les sécantes MB, MD. L'équation de la conique E, rapportée à ces axes, sera de la forme

(3) $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Dans cette équation, si l'on désigne par x', x'' les valeurs de x pour $y = 0$ et par y', y'' les valeurs de y quand $x = 0$, la relation (1) nous conduit à

$$\frac{x' - x''}{x'\,x''} = \frac{y' - y''}{y'\,y''}$$

qui entraîne la suivante entre les coefficients

(4) $$d^2 - 4af = e^2 - 4cf\ (*).$$

Soit maintenant

$$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 = 0$$

l'équation de notre conique E rapportée à son centre et à ses axes; en appelant α, β les angles de MB, MD avec le grand axe, et P, Q les coordonnées de M relatives à ces axes, le retour aux axes obliques transformera cette équation en celle-ci :

(5) $$\left\{\begin{array}{l} B^2(p + x\cos\alpha + y\cos\beta) \\ + A^2(q + x\sin\alpha + p\sin\beta)^2 - A^2B^2 = 0. \end{array}\right.$$

En identifiant cette équation avec l'équation (3), on aura

$$\begin{aligned} a &= A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha, \\ c &= A^2\sin^2\beta + B^2\cos^2\beta, \\ d &= 2A^2q\sin\alpha + 2B^2p\cos\alpha, \\ e &= 2A^2q\sin\beta + 2B^2p\cos\beta, \\ f &= p^2B^2 + q^2A^2 - A^2B^2. \end{aligned}$$

(*) Soit $cy^2 + ey + f = 0$, l'équation inverse est $fz^2 + ez + c = 0$; le carré de la différence des racines est $\frac{e^2 - 4cf}{4f^2}$; donc, etc. Tm.

Dès lors la relation (4) deviendra

$$\begin{aligned} 8pq\,A^2B^2\sin\alpha\cos\alpha &+ A^2B^2(A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha) \\ &- A^2B^2(p^2\sin^2\alpha + q^2\cos^2\alpha) \\ = 8pq\,A^2B^2\sin\beta\cos\beta &+ A^2B^2(A^2\sin^2\beta + B^2\cos^2\beta) \\ &- A^2B^2(p^2\sin^4\beta + q^2\cos^2\beta) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &4pq(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \\ &+ (\sin^2\alpha - \sin^2\beta)(A^2 - B^2 + q^2 - p^2) = 0. \end{aligned}$$

Si la quantité $A^2 - B^2$ reste constante, cette équation ne cessera pas d'avoir lieu quelles que soient les valeurs particulières de A et de B.

On voit donc que la conique E′, homofocale à la conique E, sera coupée par les sécantes en des points A′ et B′, C′ et D′ tels, que

$$\frac{A'B'}{MA'.MB'} = \frac{C'D'}{MC'.MD'}.$$

C. Q. F. D.

Si du point M on menait des tangentes à la conique E, ces tangentes seraient évidemment dans le cas des sécantes MB, MD; dès lors, en appelant (A_1B_1) (C_1D_1) leurs points d'intersection avec une conique E_1, homofocale à E, on aurait

$$\frac{A_1B_1}{MA_1.MB_1} = \frac{C_1D_1}{MC_1.MD_1},$$

c'est-à-dire, conformément à l'énoncé de la question 357,

$$\frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} = \frac{1}{MC_1} + \frac{1}{MD_1}$$

ou

$$\frac{1}{MA_1} - \frac{1}{MB_1} = \frac{1}{MC_1} - \frac{1}{MD_1},$$

selon la position de M.

La méthode analytique que nous avons suivie nous

permettrait de démontrer très-simplement que si deux sécantes issues d'un point M coupent une conique en des points A et B, C et D satisfaisant aux relations ci-dessus, un système de deux autres sécantes ayant même point de concours et mêmes bissectrices que les premières déterminera sur la conique des points A′ et B′, C′ et D′ pour lesquels auront lieu les mêmes relations.

Le théorème contenu dans la question 357 nous permet d'établir la proposition suivante :

Deux coniques étant homofocales, les surfaces engendrées par leur révolution autour de leur axe principal seront telles, que tous les plans tangents à l'une couperont l'autre suivant des coniques ayant même paramètre.

Soient les deux ellipses homofocales E, E′. Imaginons qu'elles résultent de la section de deux ellipsoïdes homofocaux de révolution par un plan mené suivant le grand axe.

Les tangentes MT, MT′ (qui se coupent en M dans l'intérieur de E′) nous représenteront les traces sur le plan de la figure, de deux plans ayant avec l'ellipsoïde inférieur un point de contact sur le méridien d'intersection.

Ces deux plans couperaient la surface E′ suivant deux ellipses dont AB, CD (segments compris dans l'intérieur de E′) seraient les grands axes. Représentons par a, a' les demi-longueurs de ces axes, par b, b' celles des petits axes, et appelons MN la perpendiculaire élevée en M au plan de la figure dans l'ellipsoïde E′.

Cette perpendiculaire, qui, pour chaque ellipse, serait une ordonnée perpendiculaire au grand axe, nous donnerait

$$\overline{MN}^2 = \frac{b^2}{a^2}(MA.MB) = \frac{b'^2}{a'^2}(MC.MD),$$

d'où

$$\frac{b^2}{a}\left(\frac{\text{MA.MB}}{a}\right)=\frac{b'^2}{a'}\left(\frac{\text{MC.MD}}{a'}\right);$$

or

$$\frac{\text{MA.MB}}{a}=\frac{\text{MC.MD}}{a'},$$

donc

$$\frac{b^2}{a}=\frac{b'^2}{a'}.$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration faite avec mes deux ellipsoïdes se ferait évidemment avec toutes les surfaces du second ordre.

Nous avons supposé les tangentes T et T′ se coupant dans l'intérieur de l'ellipse E′. Si cela n'avait pas lieu, on pourrait mener une série de plusieurs tangentes dont les premières feraient partie, et qui seraient telles, que leurs points consécutifs d'intersection seraient dans l'intérieur de E′, ce qui permettrait de compléter la démonstration.

Note. On déduit de cette question le théorème suivant :

Étant données deux coniques homofocales, l'une fixe C, *l'autre variable* C′, *on mène à* C′ *deux tangentes* T, T′, *parallèlement à deux directions données, ces tangentes coupent* C *aux points* A, B, A′, B′; *on a, quelle que soit* C′,

$$\frac{\text{AB}}{\text{A}'\text{B}'}=\text{constante}.$$

(Mannheim.)

SOLUTION DE LA QUESTION 350 (WRONSKI)

(voir t. XV, p. 407);

PAR M. BRIOSCHI (*),
Professeur à l'université de Pavie.

Étant donnée une fonction homogène complète de degré r entre n variables, racines d'une équation de degré n également donnée, les coefficients numériques de la fonction étant tous égaux à l'unité, trouver la valeur de la fonction exprimée en fonction des coefficients de l'équation.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

La fonction homogène qui a les propriétés énoncées sera évidemment le coefficient de z^r dans le développement suivant les puissances ascendantes de z de l'expression

$$\frac{1}{(1-x_1 z)(1-x_2 z)\ldots(1-x_n z)} = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Or, en posant

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots,$$

on a

$$-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \ldots}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots};$$

mais

$$-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x_1}{1-x_1 z} + \frac{x_2}{1-x_2 z} + \ldots + \frac{x_n}{1-x_n z}$$

(*) L'illustre analyste est disciple et successeur de M. Bordoni, auteur de plusieurs ouvrages très-estimés en Italie et nullement connus au dehors de cette contrée toujours féconde en hommes de talent et digne de meilleures destinées. TM.

et

$$\frac{1}{1 - x_r z} = 1 + x_r z + x_r^2 z + \dots;$$

en conséquence on aura

$$(1) \qquad s_1 + s_2 z + s_3 z^2 + \dots = \frac{A_1 + 2A_2 z + \dots}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots},$$

où

$$s_r = x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r.$$

L'équation (1) nous donne les suivantes :

$$A_1 = s_1,$$
$$2A_2 = s_2 + A_1 s_1,$$
$$3A_3 = s_3 + A_1 s_2 + A_2 s_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$rA_r = s_r + A_1 s_{r-1} + A_2 s_{r-2} + \dots + A_{r-1} s_1,$$

lesquelles multipliées par $a_{r-1}, a_{r-2}, \dots, a_0$ donnent, en les sommant,

$$ra_0 A_r + (r-1) a_1 A_{r-1} + \dots + A_1 a_{r-1}$$
$$= -(a_1 A_{r-1}) + 2a_2 A_{r-2} + \dots + ra_r),$$

d'où

$$a_0 A_r + a_1 A_{r-1} + \dots + a_{r-1} A_1 + a_r = 0.$$

On en déduit

$$A_r = \frac{(-1)^r}{a_0^r} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} \dots & a_1 \end{vmatrix} \quad (*)$$

(*) Nous engageons les élèves à faire $n = 2$; tout devient intuitif, et la belle démonstration du célèbre analyste subsiste pour n quelconque.

Tm.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 368 (CAYLEY)

(voir p 192),

PAR M. LOUIS CREMONA.
Professeur au lycée de Cremone.

Toute conique qui touche les côtés du triangle ABC ($p=0$, $q=0$, $r=0$) est représentée par l'équation (Salmon, *Conic sections*, 3e édition, p. 247)

$$l^2p^2+m^2q^2+n^2r^2-2mnqr-2nlrp-2lmpq=0\ (*),$$

où l, m, n sont des indéterminées. Les points α, β, γ étant déterminés respectivement par les couples d'équations simultanées

$$p=0,\quad q-r=0;$$
$$q=0,\quad r-p=0;$$
$$r=0,\quad p-q=0;$$

la conique passera par les points α, β, γ, si l'on satisfait aux conditions

$$m^2+n^2-2mn=0,$$
$$n^2+l^2-2nl=0,$$
$$l^2+m^2-2lm=0,$$

ou bien

$$l=m=n;$$

donc l'équation cherchée est

$$p^2+q^2+r^2-2qr-2rp-2pq=0.$$

Note. M. Joseph Martelli, de Milan, donne la même démonstration avec plus de développement.

(*) Ou bien $(lp)^{\frac{1}{2}}+(mq)^{\frac{1}{2}}+(nr)^{\frac{1}{2}}=0$.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 369

(voir p. 192);

PAR M. LOUIS CREMONA,
Professeur au lycée de Cremone.

Soient

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0$$

les équations des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC;

$$q - r = 0, \quad r - p = 0, \quad p - q = 0$$

sont donc les équations de trois droites passant respectivement par les sommets A, B, C et se rencontrant au même point D; soient α, β, γ, les points où AD, BD, CD rencontrent BC, CA, AB. Soient

$$lp + mq + nr = 0,$$
$$l_1 p + m_1 q + n_1 r = 0$$

les équations de deux droites R, R_1 qui rencontrent respectivement BC, CA, AB aux points a, a_1; b, b_1; c, c_1; par conséquent, les équations des droites Da, Da_1, sont

$$n(r-p) - m(p-q) = 0,$$
$$n_1(r-p) - m_1(p-q) = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre droites DB, DC, Dα, Da,

$$r - p = 0,$$
$$p - q = 0,$$
$$r - p - (p - q) = 0,$$
$$r - p - \frac{m}{n}(p - q) = 0$$

est $\frac{n}{m}$ (Salmon, *Conic sections*, p. 53) et le rapport an-

harmonique des droites conjuguées DC, DB, Dα, Da_1,

$$p - q = 0,$$
$$r - p = 0,$$
$$p - q - (r - p) = 0,$$
$$(p - q - \frac{n_1}{m_1}(r - p) = 0,$$

est $\frac{m_1}{n_1}$; donc les points B, C, α, a, a_1 seront en involution si l'on a

$$mm_1 = nn_1.$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois systèmes de cinq points

$$\begin{array}{ccccc} B, & C, & \alpha, & a, & a_1, \\ C, & A, & \beta, & b, & b_1, \\ A, & B, & \gamma, & c, & c_1, \end{array}$$

(α, β, γ points doubles) soient en involution, seront

$$ll_1 = mm_1 = nn_1.$$

Il s'ensuit qu'en prenant arbitrairement la droite R,

$$lp + mq + nr = 0,$$

la droite R_1 sera

$$\frac{p}{l} + \frac{q}{m} + \frac{r}{n} = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 323

(voir t. XV, p. 226);

PAR M. MARSANO,
Professeur à Gênes.

Conservons la même figure que sur la page 226.

M. Marsano démontre qu'en général : 1° les quatre

points T, t, C, c sont sur une même circonférence; 2° si l'on porte sur OT une longueur $OL = R$ et sur Ot une longueur $Ol = R$, l'aire du triangle OLl est équivalente à l'aire du quadrilatère $TtMm$, où M, m sont les points de contact respectifs des tangentes intérieures OT, Ot.

Dans le cas particulier où $TOt = \frac{\pi}{2}$, L tombe en M et l en m; l'auteur s'appuie sur cette proposition que dans deux triangles rectangles semblables, le produit des hypoténuses est égal à la somme des produits des côtés homologues de l'angle droit; proposition qu'on trouve aussi dans ces deux Mémoires de l'auteur : *Memoria sui trianguli simili*, Genova, 1846, in-8, et *Memoria sui rapporti delle figure*, par G.-B. Marsano. Genova, 1846.

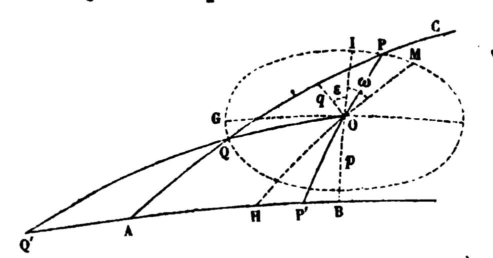
M. Marsano répond aussi aux questions 322 et 323.

SOLUTION DE LA QUESTION 312

(voir tome XIV, page 308);

PAR M. E. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Mener par un point donné dans un angle sphérique un arc de grand cercle tel, que le rapport des sinus des deux segments soit égal à une quantité donnée.



Soient p, q, les perpendiculaires sphériques abaissées

d'un point O pris dans l'intérieur d'un angle sphérique CAB sur les côtés de cet angle. Menons dans une direction quelconque un arc de grand cercle HOM, faisant un angle ω avec le prolongement OI de p, et prenons sur cet arc un point M tel, que

$$\frac{\sin \mathrm{OM}}{\sin \mathrm{OH}}=\frac{\sin \mathrm{OI}}{\sin p},$$

ou, en faisant $\mathrm{OM}=\rho$, $\mathrm{OH}=\delta$, $\mathrm{OI}=\beta$,

$$\frac{\sin \rho}{\sin \delta}=\frac{\sin \beta}{\sin p},$$

β désignant un angle donné que je supposerai plus petit que p.

Le triangle HOB donnant

$$\cot \delta=\cot p \cos \omega,$$

l'élimination de δ entre cette équation et la précédente fournit, en prenant $\sin \alpha=\frac{\sin \beta}{\sin p}$,

$$\frac{1}{\sin^2 \rho}=\frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \alpha}+\frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \beta}$$

ou

$$\cot^2 \rho=\cot^2 \alpha \sin^2 \omega+\cot^2 \beta \cos^2 \omega,$$

équation du lieu des points M et qui appartient à une conique sphérique ayant son centre en O et pour demi-axes $\mathrm{OI}=\beta$, $\mathrm{OG}=\alpha$. Cette courbe coupe le côté AC en deux points P et Q qui, étant joints au point O, donneront

$$\frac{\sin \mathrm{OP}}{\sin \mathrm{OP}'}=\frac{\sin \mathrm{OQ}}{\sin \mathrm{OQ}'}=\frac{\sin \beta}{\sin p}=\sin \alpha$$

et résolvent la question.

La détermination analytique des points P et Q n'offre

aucune difficulté. Si l'on désigne, en effet, par ε l'angle de q avec le prolongement de p, le grand cercle AC a pour équation

$$\cot\rho = \cot q \cos(\omega + \varepsilon).$$

L'élimination de ρ entre cette équation et celle de la conique se fait immédiatement et conduit à une équation du second degré par rapport à $\operatorname{tang}\omega$ qui fait connaître les angles polaires POI, QOI, et, par suite, OP, OQ.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 361

(voir page 234);

PAR M. LE Dr JOSEPH MARTELLI, DE MILAN.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B, on mène un plan quelconque déterminant un tétraèdre T de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T. On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

Si nous désignons par $x_s, y_s, z_s, x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b$ les coordonnées du sommet S et des deux points fixes A et B, celles des points B_1, B_2, B_3, où le plan mené par B coupe les arêtes du trièdre seront de la forme

$$x_1 = x_s + \lambda h_1, \qquad y_1 = y_s + \lambda k_1, \qquad z_1 = z_s + \lambda l_1,$$
$$x_2 = x_s + \mu h_2, \qquad y_2 = y_s + \mu k_2, \qquad z_2 = z_s + \mu l_2,$$
$$x_3 = x_s + \nu h_3, \qquad y_3 = y_s + \nu k_3, \qquad z_3 = z_s + \nu l_3,$$

$h_1, k_1, l_1, h_2, k_2, l_2, h_3, k_3, l_3$ étant des quantités données; λ, μ, ν trois indéterminées ; donc

$$\text{Tétraèdre ASB}_1\text{B}_2 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\lambda\mu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s \\ h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu\,\mathrm{M}_{1,2},$$

$$\text{Tétraèdre ASB}_1\text{B}_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\lambda\nu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s \\ h_1 & k_1 & l_1 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = \lambda\nu\,\mathrm{M}_{1,3},$$

$$\text{Tétraèdre ASB}_2\text{B}_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\mu\nu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = \mu\nu\,\mathrm{M}_{2,3},$$

$$\text{Tétraèdre AB}_1\text{B}_2\text{B}_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s & \lambda\mu\nu \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix}$$

et

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} = \frac{\lambda\mu\nu}{6}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu\, N_{1,2,3}.$$

Or, puisque les points B, B_1, B_2, B_3 sont dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_b - x_s & y_b - y_s & z_b - z_s & \lambda\mu\nu \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix} = 0;$$

mais les points S, A, B étant en ligne droite, on a aussi

$$\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s \\ 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_s & z_s \\ 1 & x_a & z_a \\ 1 & x_b & z_b \end{vmatrix} = 0,$$

donc la relation précédente devient

$$\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s & \lambda\mu\nu\dfrac{x_a - x_s}{x_b - x_s} \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on a

$$\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s & \lambda\mu\nu \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} \begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = 6\lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} N_{1,2,3},$$

et, par suite,

$$\text{Tétraèdre } A B_1 B_2 B_3 = \lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} N_{1,2,3}.$$

Nous aurons ainsi

$$\frac{P}{V^3} = \frac{(x_b - x_a) M_{1,2} M_{1,3} M_{2,3}}{(x_b - x_s) N^2_{1,2,3}}$$

quantité indépendante de λ, μ, ν. Donc oua en effet

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

Observation. On peut de même très-facilement démontrer pour un angle plan un théorème analogue aux précédents, c'est-à-dire : Dans un angle plan de sommet S, on donne deux points fixes A, B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B, on mène une droite quelconque déterminant un triangle T d'aire E. Soit P le produit des aires des trois triangles que l'on obtient en joignant A aux trois sommets du triangle T. On a la relation

$$\frac{P}{E^2} = \text{constante}.$$

Note du Rédacteur. M. Mannheim fait observer que le théorème de M. Faure s'obtient en exprimant par le procédé des polaires réciproques que des tétraèdres de même base et de hauteurs égales sont équivalents, une sphère étant la surface directrice.

SUR LES AIRES DES POLYGONES INSCRITS OU CIRCONSCRITS AU CERCLE ET A L'ELLIPSE;

PAR M. LE DOCTEUR JOSEPH SACCHI.

Soient $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_x, \ldots, h_n)$ l'aire d'un polygone inscrit ou circonscrit à un cercle ayant pour rayon l'unité en fonction des droites h_x qui le déterminent ; $l_1, l_2, \ldots, l_x, \ldots, l_n$ les droites analogues aux susdites et appartenant à un polygone analogue inscrit ou circonscrit à une ellipse ayant les demi-axes principaux a, b ; λ_x le demi-diamètre parallèle à l_x. L'aire A de ce dernier polygone est

$$A = ab\varphi(r_1, r_2, \ldots, r_x, \ldots, r_n) \quad \text{ou} \quad r_x = \frac{l_x}{\lambda_x}.$$

Les applications sont nombreuses :

1°. L'aire d'un triangle inscrit dans un cercle ayant l'unité pour rayon étant

$$\varphi = \frac{h_1 h_2 h_3}{4},$$

l'aire d'un triangle inscrit dans l'ellipse ayant les demi-axes a, b sera

$$A = \frac{ab}{4} r_1 r_2 r_3,$$

c'est la formule de Mac-Cullagh ; et comme l'on a aussi

$$\varphi = \sqrt{s(s-h_1)(s-h_2)(s-h_3)}$$

ou

$$2s = h_1 + h_2 + h_3,$$

ainsi l'on aura

$$A = ab\sqrt{t(t-r_1)(t-r_2)(t-r_3)}$$

ou

$$2t = r_1 + r_2 + r_3,$$

formule qui est due à mon ami le Dr Brioschi (*Teorica dei determinanti*, p. 28; *Sopra alcuni teoremi di geometria*, Annali del Sig. Tortolini, 1853).

2°. Pour le triangle circonscrit au cercle, on a

$$\varphi = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{2},$$

par conséquent, pour le triangle circonscrit à l'ellipse on aura

$$A = \frac{ab}{2}(r_1 + r_2 + r_3),$$

formule plus simple que celle qui a été trouvée par le Dr Brioschi, *loco citato*.

Ainsi les aires φ_1, φ_2, φ_3 d'un quadrilatère inscrit, ou circonscrit à un cercle, inscrit et circonscrit simultanément à deux cercles étant

$$\varphi_1 = \sqrt{(s-h_1)(s-h_2)(s-h_3)(s-h_4)},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(dd_0)^2 - (h_1 h_3 - h_2 h_4)^2},$$

$$\varphi_3 = \sqrt{h_1 h_2 h_3 h_4}$$

où

$$2s = h_1 + h_2 + h_3 + h_4,$$

et d, d_0 sont les deux diagonales, on aura les aires d'un quadrilatère inscrit, circonscrit dans l'ellipse, inscrit dans l'ellipse des demi-axes *ab* et circonscrit à un autre qui est concentrique et homothétique à la première ainsi représentées

$$A_1 = ab\sqrt{(t-r_1)(t-r_2)(t-r_3)(t-r_4)},$$

$$A_2 = \frac{ab}{2}\sqrt{(rr_0)^2 - (r_1 r_3 - r_2 r_4)^2},$$

$$A_3 = \sqrt{r_1 r_2 r_2 r_4}$$

où

$$2t = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$

PROBLÈME MALFATTI

(voir t. XII, p. 181).

Dans l'endroit cité, on a les trois équations

$$x = s\sin^2(\sigma - \varphi),$$
$$y = s\sin^2(\sigma - \chi),$$
$$z = s\sin^2(\sigma - \psi).$$

Substituant pour σ, φ, χ, ψ leurs valeurs, M. Cayley trouve (*Quarterly Journal*, déc. 1855, p. 226):

$$2x = s - \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} + \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}} - \sqrt{\frac{(s-a)ac}{s}} - \sqrt{\frac{(s-c)bc}{s}},$$

$$2y = s - \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} - \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}} + \sqrt{\frac{(s-b)ac}{s}} - \sqrt{\frac{(s-c)bc}{s}},$$

$$2z = s - \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} - \sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}} - \sqrt{\frac{(s-b)ac}{s}} + \sqrt{\frac{(s-c)ab}{s}},$$

$$2yz = \sqrt{(s-b)(s-c)} - \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{bc},$$

$$2zx = \sqrt{(s-c)(s-a)} - \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{ac},$$

$$2xy = \sqrt{(s-a)(s-b)} - \sqrt{s(s-c)} + \sqrt{ab}.$$

SUR LA QUESTION 365

(voir page 125) :

PAR M. LEBESGUE.

Soient a, b, m entiers, b non carré :

1°. $a - \sqrt{b}$, positif plus petit que 1,

$$(a + \sqrt{b})^m = A + B\sqrt{b} = P.$$

$2a - 1$ est le plus grand entier contenu dans P.

2°. $\sqrt{b} - a$ positif plus petit que 1 et m pair.

$2A - 1$ est le plus grand entier contenu dans P.

3°. $\sqrt{b} - a$ positif plus petit que 1 et m impair.

$2A$ est le plus grand entier contenu dans P.

4°.

$$b = 3, \quad a = 1, \quad 3B^2 - A^2 = 2^{2n+1},$$
$$m = 2n + 1.$$

2^{n+1} est la plus haute puissance de 2 qui divise $2A$.

C'est le théorème de M. Sylvester avec une condition de plus.

5°.

$$b = 3, \quad a = 1, \quad m = 2n, \quad A^2 - 3B^2 = 2^n.$$

$2A$ est l'entier immédiatement au-dessus de P et 2^{n+1} est la *plus haute puissance* de 2 qui le divise.

On trouverait sans peine d'autres théorèmes analogues.

NOTE

Sur des lieux géométriques relatifs à des faisceaux de coniques.

1. Le lieu géométrique du pôle d'une droite fixe relativement à un faisceau de coniques circonscrites au même quadrilatère est une conique. En effet, projetant le système de manière que la droite aille à l'infini, les pôles deviennent les centres du faisceau projeté des coniques qui passeront toujours par quatre mêmes points; or le lieu de ces centres est une conique; donc, etc.

Remarque. C'est par erreur qu'on lit page 388 du tome IV que ce lieu est une ligne du sixième degré.

Lorsque la droite fixe est une des six cordes communes aux coniques, le lieu cherché devient une droite.

2. L'enveloppe des polaires d'un point fixe relativement à un faisceau de coniques inscrites dans le même quadrilatère est une conique.

Lorsque ce point est un des angles du quadrilatère, la conique se réduit à un point.

3. L'enveloppe des polaires d'un point fixe relativement à un faisceau de coniques circonscrites au même quadrilatère est un point.

4. Le lieu géométrique des pôles d'une droite fixe relativement à un faisceau de coniques inscrites à un quadrilatère est une droite.

Observation. Lorsque la droite fixe se transporte à l'infini, les pôles deviennent les centres de coniques qui sont ainsi en ligne droite. Théorème de Newton.

NOTE

Sur la polaire réciproque d'une conique et d'une surface du second degré.

1. Soient données cette équation rendue homogène d'une conique

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ &\quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

$\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la conique directrice, l'équation de la polaire réciproque de la conique (1) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$\frac{d\varphi}{dx_1}$ est la dérivée de φ relativement à x_1, etc., et où

$$a_{21} = a_{12},\quad a_{32} = a_{23},\quad a_{31} = a_{13};$$

car ce déterminant a pour résultat l'équation (a) du tome VII, page 413 des *Nouvelles Annales*.

Observation. Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant $\frac{d\varphi}{dx_1}$, $\frac{d\varphi}{dx_2}$, $\frac{d\varphi}{dx_3}$ par x_1, x_2, x_3 (*voir* Brioschi, *Théorie des Déterminants*, traduction française, p. 47). On a omis de dire que la directrice est

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

2. Soient données cette équation rendue homogène d'une surface du second degré

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 \\ \qquad + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 \\ \qquad + a_{44}x_4^2 = 0, \end{array} \right.$$

$\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la surface directrice.

L'équation de la polaire réciproque de la surface (2) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{d\varphi}{dx_4} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & \frac{d\varphi}{dx_4} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \ldots$$

Observation. Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant $\frac{d\varphi}{dx_1}$, $\frac{d\varphi}{dx_2}$, $\frac{d\varphi}{dx_3}$, $\frac{d\varphi}{dx_4}$ par x_1, x_2, x_3, x_4.

Remarque. Les fonctions *quadratiques* homogènes à n variables sont représentées par ce symbole

$$\Sigma_r \Sigma_s a_{r,s} x_r x_s,$$

en donnant à r et s toutes les valeurs de la suite 1, 2, 3,..., n et posant

$$a_{sr} = a_{rs}.$$

Ainsi pour $n = 3$, on donne à r et s les valeurs successives 1, 2, 3 et l'on obtient l'équation (1).

Pour $n = 4$, on donne à r et s les valeurs successives 1, 2, 3, 4 et l'on obtient l'équation (2).

Une fonction quadratique homogène à n termes variables renferme donc $\frac{n(n+1)}{2}$ termes.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES ET DES LIGNES, PLANS POLAIRES ET DROITES POLAIRES

(voir t. XI, p. 185; t. XII, p. 272, et t. XIV, p. 111).

---

1. *Notations.* Représentons les trois coordonnées d'un point dans l'espace par $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$, ce qui permet de rendre *homogènes* les équations des surfaces. Quand on dit qu'un point a pour coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, il faut sous-entendre $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$. Dans le résultat final d'une opération, on fait $x_4 = 1$; on revient alors aux coordon-

nées ordinaires. Les avantages de cette notation consistent dans la forme symétrique des résultats, si favorable à la mémoire, et ensuite dans la facilité d'appliquer aux équations les propriétés des fonctions homogènes.

Soit

$$u = 0$$

l'équation rendue homogène d'une surface de degré n, de sorte que u est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4, coordonnées de la surface dont chaque terme est de degré n; U est la même fonction en X_1, X_2, X_3, X_4 coordonnées d'un point *quelconque* de l'espace.

$u^{(p)}_{x_1}$, $u^{(p)}_{x_2}$, $u^{(p)}_{x_3}$, $u^{(p)}_{x_4}$ sont les dérivées d'ordre p de la fonction u, prises respectivement par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4; de même $U^{(p)}_{X_1}$, $U^{(p)}_{X_2}$, $U^{(p)}_{X_3}$, $U^{(p)}_{X_4}$.

2. *Plans polaires.* $u = 0$ étant une équation homogène d'une surface de degré n, l'équation

$$x_1 U^{(p)}_{X_1} + x_2 U^{(p)}_{X_2} + x_3 U^{(p)}_{X_3} + x_4 U^{(p)}_{X_4} = 0$$

est l'équation du *plan polaire* d'ordre p du point X_1, X_2, X_3, X_4 désigné comme pôle; x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées courantes du plan.

3. Théorème. *Étant données trois surfaces de degré* n, n_1, n_2, *le lieu du pôle dont les trois plans polaires correspondants d'ordre* p *passent par la même droite est une surface de degré* $n + n_1 + n_2 - 3p$.

Démonstration. Soient

$u = 0$ l'équation de la surface de degré n,
$v = 0$ — n_1,
$w = 0$ — n_2,

on aura

$$x_1 U^{(p)}_{X_1} + x_2 U^{(p)}_{X_2} + x_3 U^{(p)}_{X_3} + x_4 U^{(p)}_{X_4} = 0,$$

équation du plan polaire relative à $u = 0$;

$$x_1 V_{X_1}^{(p)} + x_2 V_{X_2}^{(p)} + x_3 V_{X_3}^{(p)} + x_4 V_{X_4}^{(p)} = 0,$$

équation du plan polaire relative à $v = 0$;

$$x_1 W_{X_1}^{(p)} + x_2 W_{X_2}^{(p)} + x_3 W_{X_3}^{(p)} + x_4 W_{X_4}^{(p)} = 0,$$

équation du plan polaire relative à $w = 0$.

Si ces trois plans passent par la même droite, les plans menés parallèlement par l'origine passent aussi par une même droite, et *vice versâ*. Pour avoir les équations de ces plans parallèles, il suffit de supprimer les termes en X_4, et alors, parce que les plans passent par une même droite, le déterminant suivant doit être nul :

$$\begin{vmatrix} U_{X_1}^{(p)} & U_{X_2}^{(p)} & U_{X_3}^{(p)} \\ V_{X_1}^{(p)} & V_{X_2}^{(p)} & V_{X_3}^{(p)} \\ W_{X_1}^{(p)} & W_{X_2}^{(p)} & W_{X_3}^{(p)} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu cherché; or $U_{X_1}^{p}$ est de degré $n - p$, $V_{X_2}^{p}$ de degré $n_1 - p$, $W_{X_3}^{(p)}$ de degré $n_2 - p$; donc l'équation du lieu est de degré $n + n_1 + n_2 - 3p$.

C. Q. F. D.

Corollaire. 1°. Si $n = n_1 = n_2$, le degré du lieu est $3(n - p)$.

2°. Si $n = n_1 = n_2 = 2$ et $p = 1$, le lieu est du troisième degré.

Remarque. Le plan polaire d'ordre 1 est le lieu des *centres harmoniques* relatifs aux sécantes qui passent par le pôle (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 347).

4. Théorème. *Étant données quatre surfaces de degré* n, n₁, n₂, n₃, *le lieu du pôle dont les quatre plans po-*

laires d'ordre p par rapport à ces surfaces passent par un même point est une surface et du degré

$$n + n_1 + n_2 + n_3 - 4p.$$

Démonstration. Soient

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0$$

les équations des quatre surfaces de degrés respectifs n, n_1, n_2, n_3; pour que les quatre plans polaires d'ordre p passent par le même point, il faut établir la relation

$$\begin{vmatrix} U_{X_1}^{(p)} & U_{X_2}^{(p)} & U_{X_3}^{(p)} & U_{X_4}^{(p)} \\ V_{X_1}^{(p)} & V_{X_2}^{(p)} & V_{X_3}^{(p)} & V_{X_4}^{(p)} \\ W_{X_1}^{(p)} & W_{X_2}^{(p)} & W_{X_3}^{(p)} & W_{X_4}^{(p)} \\ \Phi_{X_1}^{(p)} & \Phi_{X_2}^{(p)} & \Phi_{X_3}^{(p)} & \Phi_{X_4}^{(p)} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu qui est de degré

$$n + n_1 + n_2 + n_3 - 4p.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. 1°. Si $n = n_1 = n_2 = n_3$, le degré du lieu est $4(n - p)$.

2°. Si $n = n_1 = n_2 = n_3 = 2$ et $p = 1$, le degré est 4.

SUR L'HEXAGONE INSCRIPTIBLE DANS UNE CONIQUE

Et solution de la question 369

(voir page 251);

D'APRÈS M. BRIOSCHI.

Soit l'hexagone 123456.

$r = 0$	équation du côté	12
$s = 0$	—	34
$t = 0$	—	56

$\beta r + \alpha s + t = 0$ équation du côté 23
$r + \gamma s + \beta t = 0$ — 45
$\gamma r + s + \alpha t = 0$ — 61

Si ces relations subsistent, l'hexagone est inscriptible dans la conique ayant pour équation

$$r^2 + s^2 + t^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) st + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) tr + \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) rs = 0;$$

les équations des diagonales sont

(13) $\alpha\beta r + s + \alpha t = 0,$
(24) $r + \alpha\beta s + \beta t = 0,$
(35) $\beta r + \beta\gamma s + t = 0;$

(14) $\alpha r + \beta s + \alpha\beta t = 0,$
(25) $\alpha r + \alpha\gamma s + \gamma t = 0,$
(36) $\beta\gamma r + \beta s + \gamma t = 0;$

(15) $r + \gamma s + \alpha\gamma t = 0,$
(26) $\alpha\gamma r + \alpha s + t = 0,$
(46) $\gamma r + s + \beta\gamma t = 0.$

Soient

A l'intersection des côtés (34) et (56),
B — (12) et (56),
C — (34) et (12);

le point A étant déterminé par les équations

$$s = 0, \quad t = 0,$$

l'équation de la droite A 1 est de la forme

$$s + kt = 0;$$

mais le point (1) est déterminé par les équations

(12) $r = 0,$
(16) $\gamma r + s + \alpha t = 0;$

par conséquent,

$$k = \alpha;$$

on aura aussi

(A 1) $$s + \alpha t = 0,$$

(A 2) $$t + \alpha s = 0,$$

(B 3) $$t + \beta r = 0,$$

(B 4) $$r + \beta t = 0,$$

(C 5) $$r + \gamma s = 0,$$

(C 6) $$s + \gamma r = 0.$$

Soient les trois droites

$$s - t = 0, \quad t - r = 0, \quad r - s = 0.$$

La première droite passe par le point A et rencontre BC en *a*.

La deuxième droite passe par le point B et rencontre AC en *b*.

La troisième droite passe par le point C et rencontre AB en C.

Et les trois droites se coupent en un même point.

On en déduit que les cinq droites :

AB, AC, A*a*, A1, A2 sont en involution, A*a* est la droite double.

BC, BA, B*b*, B3, B4 sont en involution, B*b* est la droite double.

CA, CB, C*c*, C5, C6 sont en involution, C*c* est la droite double.

Si l'on suppose $\alpha\beta\gamma = 1$,

Les trois équations ci-dessus (13), (35), (15) se réduisent à la première, savoir

(1) $$\alpha\beta r + s + \alpha t = 0,$$

c'est-à-dire les points 1, 3, 5 sont sur la même droite donnée par l'équation (1); de même les points 2, 4, 6

sont sur la même droite donnée par l'équation

$$(2) \qquad r + \alpha\beta s + \beta t = 0,$$

de sorte que l'hexagone est inscrit entre les deux droites (1) et (2), et l'équation de la conique se réduit au produit (1) (2) = 0; les équations (1) et (2) sont celles des deux droites R et S du problème Cayley.

REMARQUE SUR LA NOTE DE M. ALLEGRET

(voir page 186);

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

Les équations

$$x_5 + a_1 x_1 = x_1 + a_2 x_2 = \ldots = x_4 + a_5 x_5$$

peuvent être résolues très-aisément comme il suit.

En représentant par s la valeur commune des quantités $x_5 + a_1 x_1$, $x_1 + a_2 x_2, \ldots$, on a

$$\begin{aligned} x_5 + a_1 x_1 &= s, \\ x_1 + a_2 x_2 &= s, \\ x_2 + a_3 x_3 &= s, \\ x_3 + a_4 x_4 &= s, \\ x_4 + a_5 x_5 &= s. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les équations, après les avoir multipliés respectivement par

$$1, \quad -a_1, \quad +a_1 a_2, \quad -a_1 a_2 a_3, \quad +a_1 a_2 a_3 a_4,$$

nous aurons

$$x_5 (1 + a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) = s (1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_4).$$

Ainsi la valeur de x_5 est connue. Un simple changement de lettre donnera ensuite les valeurs des autres inconnues.

NOTE

Sur quelques formules propres à la détermination des trois indices principaux dans les cristaux biréfringents;

Par M. DE SENARMONT.

§ 1. Lorsqu'il s'agit de déterminer les trois indices principaux d'un cristal biréfringent, on procède généralement de la manière suivante :

On taille trois prismes de façon que leurs arêtes soient parallèles aux trois axes principaux A, B, C d'élasticité optique. Avec chacun de ces prismes, on détermine facilement l'indice du rayon polarisé perpendiculairement à l'arête réfringente; ce rayon obéit en effet aux lois de Descartes, et si l'on observe le spectre correspondant, dans la position du minimum de déviation, on peut appliquer la formule qui conviendrait à un milieu monoréfringent.

L'indice ainsi déterminé est inversement proportionnel à la racine carrée de l'élasticité optique dans le sens de l'arête réfringente du prisme.

§ 2. Avec chacun de ces prismes, on peut encore observer un second spectre correspondant au rayon polarisé parallèlement à l'arête réfringente. Ce rayon n'obéit pas aux lois de Descartes, sa déviation est néanmoins susceptible d'un minimum. Or les lois connues de la double réfraction permettent d'établir une relation entre cette déviation minimum, l'angle du prisme, l'orientation de ses faces dans le cristal et les élasticités optiques suivant les deux axes principaux perpendiculaires à l'arête réfringente.

Soient a^2, b^2, c^2 les élasticités optiques parallèlement aux axes principaux A, B, C; soient α, β, γ les trois indices, de sorte que

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = \frac{1}{b}, \quad \gamma = \frac{1}{c}.$$

Soient A, B, C les angles des trois prismes dont les arêtes réfringentes sont respectivement parallèles aux axes principaux A, B, C.

Soient Δ'_o, Δ''_o, Δ'''_o les déviations minima des rayons qui ont subi la réfraction ordinaire dans les trois prismes, Δ'_e, Δ''_e, Δ'''_e les déviations minima des rayons qui ont subi la réfraction extraordinaire; on posera, pour abréger,

$$D'_o = A + \Delta'_o, \quad D''_o = B + \Delta''_o, \quad D'''_o = C + \Delta'''_o,$$
$$D'_e = A + \Delta'_e, \quad D''_e = B + A''_e, \quad D'''_e = C + \Delta'''_e.$$

Soient θ', θ'', θ''' les angles compris entre la bissectrice de l'angle réfringent du prisme et l'un des deux axes d'élasticité optique perpendiculaires à l'arête réfringente. (On comptera ces angles de facon que $\theta = 0$ ou $\theta = 90^\circ$, selon que la bissextrice coïncide avec l'axe correspondant au coefficient d'élasticité écrit le premier ou le second dans les formules.)

On a les relations suivantes entre les coefficients d'élasticité et les données expérimentales obtenues avec chacun des trois prismes.

Premièrement. Pour les rayons polarisés normalement aux arêtes réfringentes et qui obéissent aux lois de Descartes :

$$(\mathrm{M}) \qquad a = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{D'_o}{2}}, \quad b = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{D''_o}{2}}, \quad c = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{D'''_o}{2}}.$$

Secondement. Pour les rayons polarisés parallèlement

aux arêtes réfringentes et qui obéissent aux lois de la réfraction extraordinaire :

$$
(\mathrm{N})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\sin^2\frac{A}{2} - b^2\sin^2\frac{D'_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - c^2\cos^2\frac{D'_e}{2}\right)\cos^2\theta' \\
&+\left(\cos^2\frac{A}{2} - b^2\cos^2\frac{D'_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A}{2} - c^2\sin^2\frac{D'_e}{2}\right)\sin^2\theta' = 0, \\
&\left(\sin^2\frac{B}{2} - c^2\sin^2\frac{D''_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{B}{2} - a^2\cos^2\frac{D''_e}{2}\right)\cos^2\theta'' \\
&+\left(\cos^2\frac{B}{2} - c^2\cos^2\frac{D''_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{B}{2} - a^2\sin^2\frac{D''_e}{2}\right)\sin^2\theta'' = 0, \\
&\left(\sin^2\frac{C}{2} - a^2\sin^2\frac{D'''_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{C}{2} - b^2\cos^2\frac{D'''_e}{2}\right)\cos^2\theta''' \\
&+\left(\cos^2\frac{C}{2} - a^2\cos^2\frac{D'''_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{C}{2} - b^2\sin^2\frac{D'''_e}{2}\right)\sin^2\theta''' = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Deux prismes différents suffisent donc généralement pour déterminer les trois coefficients d'élasticité (ou en d'autres termes les trois indices principaux); et même pour fournir, en plus, une relation de vérification entre ces coefficients.

Si le cristal était à un seul axe optique, deux des trois quantités a, b, c deviendraient égales entre elles.

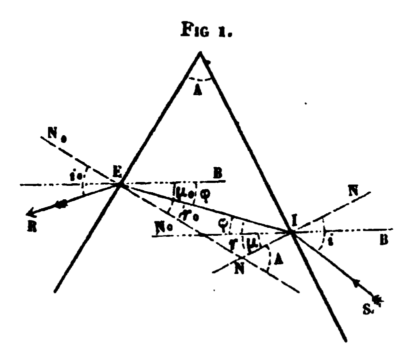
§ 3. Les formules (M) se déduisent par les procédés ordinaires des lois de Descartes. Quant aux formules (N), on peut les établir de la manière suivante :

Soit (*fig.* 1) le prisme, d'angle A, dont l'arête réfringente est parallèle à l'axe principal A. Les deux autres axes principaux B et C sont normaux à l'arête réfringente.

Soient BI, BE des droites parallèles à l'axe principal B; NI, N_0E les normales aux faces réfringentes; SI, ER les directions des normales aux ondes planes extérieures,

incidente et émergente; IE la direction de la normale à l'onde plane intérieure réfractée.

Fig 1.



Désignons par φ l'angle que cette dernière normale fait avec l'axe principal B, par i, i_0 les angles d'incidence SIN, N_0ER; par r, r_0, les angles EIN, IEN_0; par μ, μ_0 les angles BIN, BEN_0.

On a les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} i + i_0 = \Delta + A = D,\\ r + r_0 = A,\\ \left.\begin{array}{l}\varphi = r - \mu\\ \varphi = \mu_0 - r_0\end{array}\right\}\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l} r = \varphi + \mu,\\ r_0 = \mu_0 - \varphi,\end{array}\right.\\ \mu_0 + \mu = A.\end{array}\right.$$

On posera

$$\mu_0 - \mu = B,$$

de sorte qu'on a

$$r_0 - r = B - 2\varphi.$$

Lorsqu'on prend pour unité la vitesse de propagation normale des ondes lumineuses dans le milieu extérieur au prisme, et que l'on désigne par v la même vitesse intérieure au milieu cristallisé, on a généralement

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{v}.$$

Mais quand la direction de cette dernière vitesse est perpendiculaire à l'axe principal A et fait un angle φ avec l'axe principal B, on a, par la théorie connue de la double réfraction,

$$v = \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi},$$

de sorte que pour l'onde transmise au travers du prisme, on a à l'incidence et à l'émergence

$$(2)\quad \sin i = \frac{\sin r}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}},\quad \sin i_0 = \frac{\sin r_0}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}}.$$

Si l'on retranche et qu'on ajoute successivement ces équations membre à membre,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{i_0 - i}{2} &= \frac{1}{\cos\frac{D}{2}}\,\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2}-\varphi\right)}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}},\\ \cos\frac{i_0 - i}{2} &= \frac{1}{\sin\frac{D}{2}}\,\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B}{2}-\varphi\right)}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}}. \end{aligned}\right.$$

Carrant et ajoutant membre à membre,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\left(\begin{aligned}&\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\\ &- c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\end{aligned}\right)\\ &+ \sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\end{aligned}\right\}\\ &+\sin\varphi\left\{\begin{aligned} &\sin\varphi\left(\begin{aligned}&\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\\ &- b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\end{aligned}\right)\\ &+ \cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Mais dans le cas du minimum de déviation

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = \frac{dD}{d\varphi} = 0.$$

La dérivée par rapport à φ du premier membre de l'équation précédente est nulle, donc

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\varphi \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi\left(\begin{array}{l} \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2} \\ - c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \end{array}\right) \\ + \sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \end{array}\right\} \\ - \cos\varphi \left\{\begin{array}{l} \sin\varphi\left(\begin{array}{l} \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2} \\ - b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \end{array}\right) \\ + \cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\} = 0.$$

En vertu des équations (4) et (5), il faut qu'on ait simultanément

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \\ = \sin\varphi\left[\begin{array}{l} b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \\ - \left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}\right) \end{array}\right], \\ \sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \\ = \cos\varphi\left[\begin{array}{l} c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} \\ - \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right) \end{array}\right]. \end{array}\right.$$

En multipliant entre elles les équations (6) membre à membre,

$$b^2 c^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}$$
$$-\,b^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)$$
$$-\,c^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)$$
$$+\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=0.$$

Si l'on désigne par θ l'angle que la bissectrice du prisme fait avec l'axe principal B, on trouvera facilement sur la figure

$$\mu+90-\frac{A}{2}=\theta,\quad \mu_1+90^\circ-\frac{A}{2}=180^\circ-\theta,$$

donc

$$\mu_1-\mu=B=180^\circ-\theta,\quad \frac{B}{2}=90^\circ-\theta.$$

L'équation précédente devient alors

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&b^2 c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\\&-b^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\sin^2\theta+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\theta\right)\\&-c^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\cos^2\theta+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\sin^2\theta\right)\\&+\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=0,\end{aligned}\right.$$

ou, sous une autre forme,

$$\left(\sin^2\frac{A}{2}-b^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2}-c^2\cos^2\frac{D}{2}\right)\cos^2\theta$$
$$+\left(\cos^2\frac{A}{2}-b^2\cos^2\frac{D}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A}{2}-c^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\sin^2\theta=0.$$

En divisant les équations (6) membre à membre, on trouve

$$\operatorname{tang}^2 \varphi = \frac{c^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\sin^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\theta\right)}{b^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\cos^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\sin^2\theta\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta\cos^2\frac{D}{2}\left(c^2\sin^2\frac{D}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right) + \cos^2\theta\sin^2\frac{D}{2}\left(c^2\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\theta\sin^2\frac{D}{2}\left(b^2\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right) + \cos^2\theta\cos^2\frac{D}{2}\left(b^2\sin^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right)}.$$

Lorsque la bissectrice de l'angle du prisme coïncide avec un des axes principaux, la formule précédente se simplifie. Elle se réduit, selon que $\theta = 0$ ou que $\theta = 90^\circ$, à

$$\left(\sin^2\frac{A}{2} - b^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - c^2\cos^2\frac{D}{2}\right) = 0$$

ou à

$$\left(\sin^2\frac{A}{2} - c^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - b^2\cos^2\frac{D}{2}\right) = 0.$$

Les premiers facteurs égalés de zéro déterminent b ou c et donnent

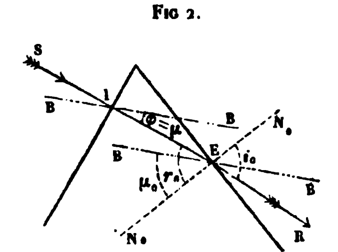
$$\operatorname{tang}\varphi = \infty \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\varphi = 0.$$

Quant aux seconds facteurs ; ici, comme dans la recherche du minimum de déviation, avec les conditions propres aux milieux monoréfringents, ils répondraient à une question différente de celle qu'il s'agit de résoudre.

§ 4. On trouve des relations encore plus simples lorsque l'on observe le spectre émergent, non plus en plaçant le prisme dans la position du minimum de déviation, mais dans une situation telle, que le rayon incident rencontre normalement la face d'entrée.

La ligne SI est normale en même temps à l'onde plane extérieure incidente et à la face du prisme.

Fig 2.



ER est la normale à l'onde plane extérieure émergente; IE, prolongement de SI, est la normale à l'onde plane intérieure réfractée.

Si donc on conserve les mêmes notations qu'au § 3, on trouve

$$i = 0, \quad i_0 = D, \quad r = 0, \quad r_0 = A, \quad \varphi = \mu,$$

de sorte que les équations (2) deviennent

$$b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 D}.$$

Lorsque la face d'entrée est parallèle ou perpendiculaire à l'axe principal B,

$$b^2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 D} \quad \text{ou} \quad c^2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 D}.$$

§ 5. On peut étendre les mêmes procédés d'observation et des formules analogues aux cristaux à un seul axe optique, même lorsque l'arête réfringente du prisme est dirigée d'une manière quelconque.

Il arrive alors que le rayon incident et le rayon émergent extraordinaire ne sont pas dans un même plan, mais restent tous deux parallèles à la section droite du prisme. Les ondes planes incidentes réfractée et émergente se

L'angle réfringent du prisme...... $A = 38°.12'$ $'$

L'angle compris entre la bissectrice de l'angle du prisme et l'axe principal B.......................... $\theta = 70.53.30$

Les déviations mesurées pour la région du jaune, entre les raies D et E, sont.......................... $\Delta_o = 22.35$

$\Delta_e = 22.56$

On a donc.................... $D_o = 60.48$

$D_e = 61.\ 9$

Donc

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin\frac{D_o}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 1,5458$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{b^2}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}\cos^2\theta = 0,020340 \\ \frac{1}{b^2}\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D_e}{2}\sin^2\theta = 0,492868\end{array}\right\}\ 0,513208$$

$$\sin^2\frac{D_e}{2}\cos^2\frac{D_e}{2} = \qquad 0,191794$$

$$P = 0,321414$$

$$\frac{1}{b^2}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \qquad 0,228628$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}\sin^2\theta = 0,070922 \\ \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D_e}{2}\cos^2\theta = 0,024755\end{array}\right\}\ 0,095677$$

$$Q = 0,132951$$

$$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{P}{Q}} = 1,5548.$$

Or on a, d'après Rudberg :

Pour la raie D..... $\frac{1}{b} = 1,54418$, $\frac{1}{a} = 1,55328$

Pour la raie E..... $\frac{1}{b} = 1,54711$, $\frac{1}{a} = 1,55631$

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

VII.

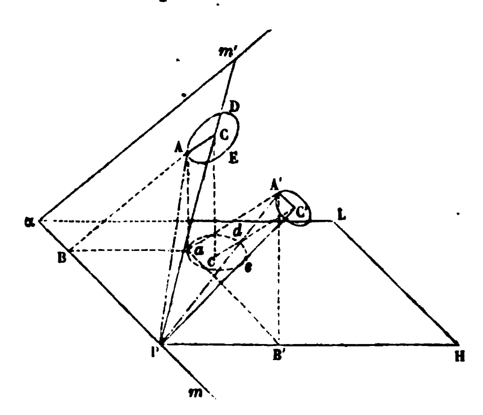
Démonstration, par la géométrie élémentaire, *de cette Proposition* : La projection d'un cercle sur un plan est une ellipse.

Dans l'une des parties du Programme officiel de *l'enseignement élémentaire* des lycées, il est question de l'*ellipse* que l'on définit : Une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes nommés *foyers* est une quantité constante. Dans une autre partie du même Programme, il s'agit de déterminer la projection d'un cercle sur un plan. Pour compléter la solution qu'on a donnée de cette dernière question, il peut être utile de faire voir que la projection du cercle est une ellipse. Tel est l'objet de cette Note.

On démontre très-simplement par la géométrie élémentaire que si l'on coupe un cylindre droit à base circulaire par un plan incliné sur celui de la base du cylindre, la section est une ellipse, en adoptant la définition de l'ellipse que nous venons de rappeler. C'est là une proposition que nous admettrons comme déjà établie. De cette proposition même il résulte que, pour démontrer qu'une certaine courbe plane donnée est une ellipse, il suffit de

prouver qu'il est possible d'obtenir un cercle en projetant cette courbe sur un plan incliné sur celui de la courbe.

Cela posé, représentons par ADE une circonférence ayant pour centre le point C, et située dans le plan $m\alpha m'$.



Soit *ade* la projection de cette circonférence sur un plan $m\alpha$L qui coupe le plan $m\alpha m'$ suivant la droite αm, en faisant avec ce dernier plan un angle quelconque $m'\alpha$L différant d'un angle droit. Il est clair que la projection *ade* sera une courbe ayant pour centre le point c, projection du centre C de la circonférence. Pour démontrer que la courbe *ade* est une ellipse, nous allons faire voir qu'en la projetant sur un plan convenablement choisi, on obtient pour projection une circonférence.

En un point quelconque P de la droite αm élevons à cette droite une perpendiculaire PH dans le plan de projection $m\alpha$L, et, par la perpendiculaire PH, conduisons un nouveau plan PHC′ qui fasse avec le plan de projection $m\alpha$L un angle égal à l'angle $m'\alpha$L, que ce dernier plan forme avec celui de la circonférence ADE. La projection de la courbe *ade* sur le plan PHC′ sera une circonférence.

En effet, soit A' la projection sur le plan dont il s'agit d'un point quelconque a de la courbe ade. Si l'on abaisse A'B' perpendiculaire sur PH, la droite aB' sera aussi perpendiculaire à PH, et l'angle rectiligne A'B'a, qui mesure le dièdre des plans PHA'C', $m\alpha$L, sera égal à l'angle $m'\alpha$L. Si du point a on abaisse une perpendiculaire aB sur αm et qu'on joigne par la droite BA le point B au point A qui s'est projeté en a, l'angle rectiligne ABa sera aussi égal à l'angle $m'\alpha$L. Par conséquent, les deux triangles rectangles aA'B', aAB seront semblables et on aura

$$\frac{a\mathrm{B}'}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{a\mathrm{B}}.$$

Mais

$$a\mathrm{B}'=\mathrm{BP} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}a=\mathrm{PB}';$$

donc

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{\mathrm{PB}'}.$$

Il en résulte que les deux triangles rectangles ABP, A'B'P sont semblables, comme ayant un angle droit compris entre côtés proportionnels. Par suite, l'angle A'PB' est le complément de APB, et de plus on a

$$\frac{\mathrm{PA}'}{\mathrm{PA}}=\frac{\mathrm{PB}'}{\mathrm{BA}}=\frac{\mathrm{B}a}{\mathrm{BA}}.$$

Nous désignerons par n le dernier rapport $\frac{\mathrm{B}a}{\mathrm{BA}}$ qui est le cosinus de l'angle $m'\alpha$L; de sorte qu'on aura

$$\frac{\mathrm{PA}'}{\mathrm{PA}}=n.$$

D'après cela, on voit que généralement, si a représente la projection d'un point quelconque A du plan $m'\alpha m$ sur $m\alpha$L, et A' la projection de a sur le plan PHC'; les angles APα, A'PH seront complémentaires, et que, de plus,

le rapport des lignes PA′, PA sera égal à n. Ainsi, en désignant par C′ la projection du centre c sur le plan PHC′, les angles C′PH, CPα seront complémentaires et

$$\frac{PC'}{PC} = n.$$

Il s'ensuit que les triangles A′PC′, APC ont les angles A′PC′, APC égaux entre eux, et que les côtés qui forment ces angles sont proportionnels; donc les triangles A′PC′, APC sont semblables et donnent

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{PC'}{PC} = n.$$

D'où

$$C'A' = CA \times n.$$

Ainsi la valeur de C′A′ est invariable. Ce qui démontre que la projection de la courbe *ade* sur le plan PHC′ est une circonférence qui a pour centre le point C′; donc cette courbe est une ellipse. Les diamètres des circonférences C, C′ sont égaux aux axes de l'ellipse obtenue.

G.

SOLUTION DE LA QUESTION 386

(voir p. 183);

PAR Mlle ADOLPHINE D***.

Le produit de trois nombres entiers consécutifs ne peut être ni un carré, ni le double d'un carré.

I. J'appelle ces trois nombres A, A + 1, A — 1 et b^2 un carré. Je devrais avoir

$$A(A-1)(A+1) = b^2,$$

ou bien je puis écrire

$$(A^2 - 1)A = b^2.$$

Le nombres A et $A^2 - 1$ ne pouvant pas avoir de facteurs communs doivent être deux carrés, car ils doivent contenir tous leurs facteurs premiers à des puissances paires. Mais comme $A^2 - 1$ ne peut pas être un carré parfait, la relation précédente n'est donc pas possible.

On ne peut pas non plus satisfaire par des nombres entiers à la condition

$$(A - 1)(A)(A + 1) = 2b^2.$$

Pour le démontrer, je vais prouver que A ne pourrait être ni pair ni impair.

1°. Si l'on supposait A pair, la relation

$$A(A^2 - 1) = 2b^2$$

montrerait comme tout à l'heure que $A^2 - 1$ doit être un carré, ce qui est impossible.

2°. Si l'on supposait A impair, il aura la forme $2B + 1$. Il faudrait donc avoir, après les simplifications,

$$2B(B + 1)(2B + 1) = b^2;$$

B est premier avec $B + 1$ et avec $2B + 1$; $B + 1$ et $2B + 1$ sont premiers entre eux, car un facteur commun à ces deux nombres diviserait leur différence B, ce qui est impossible puisque B est premier avec $B + 1$.

Je vois donc par là que sur ces trois facteurs deux seraient des carrés, et le troisième multiplié par 2 serait aussi un carré. Il faut donc qu'une des combinaisons suivantes :

(1)	$2B$,	$B + 1$,	$2B + 1$,
(2)	$2(B + 1)$,	B,	$2B + 1$,
(3)	$2(2B + 1)$,	B,	$B + 1$,

renferme trois carrés parfaits. Or cela est impossible, puisque dans chacune d'elles on trouve deux nombres entiers consécutifs : ainsi $2B$ et $2B+1$ pour la première, $2B+1$ et $2B+2$ pour la deuxième et B et $B+1$ pour la troisième. La relation

$$(A+1)(A)(A-1)=2b^2$$

est donc impossible, et c'est ce que je voulais démontrer.

Note du Rédacteur. Cette bonne démonstration prouve également que le produit de trois nombres consécutifs ne peut être aucune puissance parfaite d'un nombre, et cela existe *probablement* pour le produit d'un nombre quelconque de nombres consécutifs.

Le théorème de M. Faure est démontré par Goldbach (*Corresp. math. et phys.*, t. II, p. 210). (PROUHET.)

SOLUTION DE LA QUESTION 375

(voir p. 179);

PAR Mlle ADOLPHINE D***.

Démontrer que deux cercles concentriques ayant pour rayons R et $R\sqrt{-1}$ se coupent à angle droit (*).

Je trace deux cercles de centres A et B, et soit C un point d'intersection. Je joins AC et BC. Pour que ces

---

(*) Deux coniques *homothètes* et *concentriques* ont à l'infini deux points de contact, réels pour l'hyperbole, imaginaires pour l'ellipse, vérité intuitive en considérant les asymptotes. Deux paraboles égales et de même axe focal ont à l'infini deux points d'osculation. On conclut de là que deux coniques homothètes et concentriques sont la perspective de deux coniques ayant un double contact. En général, deux courbes de degré *m*, *homothètes* et ayant *mêmes* asymptotes, ont à l'infini *m* points de contact réels ou imaginaires. Une propriété analogue existe pour les surfaces. TM.

deux cercles se coupent à angle droit, il faut que

$$AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des rayons soit égale au carré de la distance des centres. En généralisant cette observation, on est conduit à dire que deux cercles réels ou imaginaires se coupent à angle droit quand leurs rayons R et R' et la distance de leurs centres satisfont à la condition

$$R^2 + R'^2 = D^2.$$

Or, dans le cas actuel, cette relation est satisfaite, car on a

$$R^2 + (R\sqrt{-1})^2 = 0.$$

Ce qu'il me fallait démontrer.

Note du Rédacteur. Cinq Françaises se sont livrées avec succès aux études mathématiques : 1° Marie Crous (1641), qui a introduit en France le calcul décimal; 2° Jeanne Dumée (1684) ; son ouvrage sur l'astronomie, jamais publié, existe manuscrit à la Bibliothèque impériale; 3° la célèbre marquise du Châtelet; 4° Hortense Lepaute, femme du célèbre horloger, et qui a calculé pendant plusieurs années la *Connaissance des Temps:* le botaniste Commerson a donné à une très-belle fleur le nom de cette femme distinguée *Peautia cœlestina,* et ensuite de Jussieu a changé ce nom en celui de *Hortensia,* généralement connu; 5° Sophie Germain, lauréat de l'Académie des Sciences, pour la question très-difficile des plaques vibrantes.

La marquise de l'Hôpital, femme du célèbre géomètre, a inséré dans le *Journal des Savants* un Mémoire sur un sujet mathématique. Lalande cite avec éloge une autre dame de sa connaissance qui s'occupait d'astronomie. Les âmes n'ont pas de sexe, dit J.-J. Rousseau, et l'intelligence réside dans l'âme.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. KRONECKER (QUESTION 373)

(voir p. 178);

PAR M. E. P***,
Professeur.

Soit

$$f_1(x) = 0, \quad (x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots, \; x_m)$$

une équation algébrique à coefficients entiers et le premier terme ayant pour coefficient l'unité; si les modules de toutes les racines sont égaux à l'unité, toutes les racines de cette équation sont des racines de l'unité.

Pour le démontrer, je représente par

$$f_2(x) = 0, \quad (x_1^2, \; x_2^2, \ldots, \; x_m^2),$$
$$f_3(x) = 0, \quad (x_1^3, \; x_2^3, \ldots, \; x_m^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'autres équations dont les racines sont respectivement celles de la proposée élevées à la deuxième, troisième, etc., puissance. Dans toutes ces équations, le premier coefficient est l'unité et tous les autres sont des nombres entiers limités, car chacun de ces coefficients est la somme d'un nombre fini de termes dont le module est l'unité, et l'on sait que le module d'une somme est inférieur à la somme des modules de ses parties.

Conséquemment, le nombre des combinaisons des valeurs de ces coefficients sera limité et l'on trouvera, parmi les équations ci-dessus, une au moins qui sera répétée un

nombre infini de fois. Supposons alors que les équations

$$f_n(x) = 0, \quad (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n),$$
$$f_p(x) = 0, \quad (x_1^p, x_2, \ldots, x_m^p),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

aient les mêmes coefficients et, par suite, les mêmes racines. Il peut arriver que ces racines, rangées comme nous l'avons fait, suivant l'ordre croissant des indices, ne soient pas respectivement égales à celles qui occupent le même rang dans la première; alors les racines de $f_n(x) = 0$, $f_p(x) = 0$, etc., seront de certaines permutations des racines de $f_1(x) = 0$. Mais comme le nombre de ces équations est infini, tandis que le nombre des permutations est fini, nous trouverons nécessairement deux équations

$$f_\alpha(x) = 0, \quad (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha),$$
$$f_\beta(x) = 0, \quad (x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_m^\beta),$$

qui appartiendront à la même permutation : par conséquent, on aura

$$x_1^\beta = x_1^\alpha, \quad x_2^\beta = x_2^\alpha, \quad \ldots, \quad x_m = x_m^\alpha,$$

d'où l'on conclut que les racines de l'équation donnée sont aussi racines de l'équation binôme

$$x^{\beta - \alpha} = 1.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. M. Kronecker a énoncé et démontré ce théorème dans le tome LIII, cahier 2 du *Journal* de Crelle. M. Prouhet et aussi M. Moutard sont parvenus chacun spontanément à la même démonstration que M. Kronecker. C'est par erreur qu'on lit à la page 178 le nom de M. Hermite.

PRINCIPES DE DISCUSSION DES SURFACES ET DES LIGNES DU SECOND DEGRÉ.

Surfaces.

1. *Notation.* On prend les coordonnées *quadrilitières* $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ afin de rendre l'équation homogène.

On donne des indices à chaque coefficient, de sorte que l'indice fait connaître le terme que le coefficient affecte, par exemple $a_{pq}\, x_p\, x_q$, et l'on pose

$$a_{pq} = a_{qp}.$$

2. Théorème de Jerrard (*). *Une fonction homogène quadratique de* n *variables est la somme de carrés de* n *fonctions linéaires de ces variables.*

Théorème fondamental. (*Voir* Serret, *Algèbre supérieure,* note V, et *Nouvelles Annales,* t. XIV, p. 279.)

3. *Formes réduites.* On déduit immédiatement de ce théorème les cas suivants; la surface représente :

1°. Deux plans qui se coupent ou ne se coupent pas;

2°. Une droite;

3°. Un point;

4°. Un ellipsoïde imaginaire.

4. *Position d'un point relativement à la surface.* Le même théorème donne la solution de ce problème *fondamental :*

(*) Auteur de *Analytical Researches, etc.*, un des deux examinateurs pour les mathématiques à l'université de Londres. Feu son frère était membre du sénat de cette université.

Étant données les coordonnées d'un point, déterminer s'il est hors *de la surface ou dans l'intérieur de la surface.*

L'équation indique si le point est sur la surface.

5. *Centre.* On égale à zéro les quatre dérivées de l'équation prises respectivement par rapport aux quatre coordonnées. Les valeurs de quatre de ces équations sont les coordonnées du centre.

6. *Déterminant.* Le dénominateur commun de ces quatre valeurs est désigné sous le nom de *déterminant* de la surface, parce qu'il en détermine la forme.

7. *Surface réglée.* On peut établir les relations qui doivent exister entre les coefficients pour qu'on puisse tracer des droites sur la surface.

8. *Déterminant nul. Centre à l'infini.*

1°. Paraboloïde hyperbolique, lorsque la surface est réglée;

2°. Paraboloïde elliptique, lorsque la surface n'est pas réglée.

9. *Déterminant qui n'est pas nul.* Centre à distance finie de l'origine.

Appliquons aux coordonnées du centre la solution du problème 4.

A. *Centre au dehors.*

1°. Hyperboloïde à une nappe, la surface étant réglée;

2°. Hyperboloïde à deux nappes, la surface n'étant pas réglée.

B. *Centre sur la surface.*

Un cône; et comme cas particulier un cylindre; centre multiple.

C. *Centre à l'intérieur.*

Ellipsoïde.

Lignes.

10. On prend les coordonnées *trilittères* $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$; le reste comme pour les surfaces.

11. Dans l'état actuel de la science, telle est la méthode à suivre quand on a pour but la *science*. Si, au contraire, on a pour but les *examens*, la méthode peut encore convenir. Il suffit de remplacer la quatrième coordonnée par l'*unité* et les coefficients à *indices* par les coefficients vulgairement employés.

SOLUTION DE LA QUESTION 389

(voir page 184);

PAR M. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Soit

$$(a) \qquad (x + x^{-1})^r = x^r + A_1 x^{r-2} + A_2 x^{r-4} + \ldots + A_2 x^{-(r-4)} + A_1 x^{-(r-2)} + x^{-r},$$

les A désignent les coefficients binomiaux.

Si l'on élève le deuxième membre au carré, le terme indépendant de x sera évidemment

$$2(1 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots),$$

on aura donc

$$\Sigma A_i^2 = \text{le coefficient moyen de } (x + x^{-1})^{2r}$$

$$= \frac{2r . 2r - 1 \ldots r + 1}{1 . 2 \ldots r} = \frac{2r!}{(r!)^2}.$$

On peut trouver d'autres relations en cherchant le coef-

ficient d'une puissance déterminée de x dans le carré du second membre de (a) et le comparant au coefficient de la même puissance de x dans $(x+x^{-1})^{2r}$. On fournirait encore d'autres relations en élevant les deux membres de (a) à une puissance indéterminée ou en multipliant cette même équation par d'autres équations analogues où l'on changerait r en d'autres indéterminées.

SOLUTION DE LA QUESTION 374

(voir p. 178);

PAR M. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier.

Les déterminants

$$u = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} \qquad v = s \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

s'annulent pour

$$x = \alpha,$$
$$y = \beta,$$
$$z = \gamma,$$

et pour

$$x = \alpha',$$
$$y = \beta',$$
$$z = \gamma',$$

à cause de l'identité de deux lignes dans chacun d'eux pour chacune de ces substitutions.

La conique

$$uw - v^2 = 0$$

passe donc par les deux points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$. Comme

$$u = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} ax + by + cz & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & b & c \end{vmatrix}$$

au point commun à la conique et à la droite

$$ax + by + cz = 0\ (^*),$$

on a

$$u_1 = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a^2 + b^2 + c^2 & b & c \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & \beta' & \gamma' \\ a^2 + b^2 + c^2 & b & c \end{vmatrix}$$

$$v_1 = \frac{s}{a} \begin{vmatrix} 0 & y & z \\ a\alpha + b\beta + c\gamma & \beta & \gamma \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

ou

$$au_1 = Ay - Bz,$$

$$aw_1 = A'y - B'z,$$

$$av_1 = sCy - sDz,$$

en faisant

$$A = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta + c\gamma & \gamma \\ a^2 + b^2 + c^2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & \gamma \\ a^2 + b^2 & c \end{vmatrix}$$

$$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En exprimant que l'équation

$$u_1 w_1 - v_1^2 = 0$$

est décomposable en deux facteurs linéaires en y et z, on a

$$(AB' - BA')^2 = 4s^2(CB' - DA')(AD - BC),$$

(*) Sur la page 178 il faut remplacer λ, μ, ν par a, b, c.

ce qui, par la règle de multiplication des déterminants, se réduit en supprimant un facteur commun a^2 et extrayant la racine carrée

$$(a^2+b^2+c^2)\mathrm{I}$$
$$=\pm 2s\sqrt{(a\alpha+b\beta+c\gamma)(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')\mathrm{I}},$$

où

$$\mathrm{I}=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Pour que la droite soit tangente, il faut donc que

$$\mathrm{I}=0$$

et s sera indéterminé, ou, si I n'est pas nul, que

$$2s=\frac{a^2+b^2+c^2}{\pm\sqrt{(a\alpha+b\beta+c\gamma)(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')}}.$$

Une proposition analogue doit avoir lieu pour la surface du troisième ordre $uwv-t^2=0$, où

$$u=\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ a & b & c & d \end{vmatrix}\qquad w=\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$v=\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ a & b & c & d \end{vmatrix}\qquad t=s\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix}$$

et le plan $ax+by+cz+du=0$.

GÉOMÉTRIE ALGORITHMIQUE.

1. Selon Kant, selon ce philosophe par excellence, car il n'est pas rhéteur (*), un jugement est *synthétique* lorsqu'il réunit deux idées dont l'une n'est pas une conséquence *nécessaire* de l'autre. Par exemple, *un corps est pesant* est une proposition *synthétique*. On *ajoute* (συντίθημι) au corps une qualité qui n'est pas renfermée dans l'idée du corps : on peut concevoir une substance non pesante; tandis que cette autre proposition, *un corps est étendu*, est un jugement *analytique*. L'idée de l'étendue est déjà comprise dans celle du *corps*; on l'en *détache* seulement (αναλυω). Or le but de toute science est de *connaître*, de trouver ce qui est inconnu. Il y a pour cela deux moyens : ou l'on réunit des idées connues pour en former une idée complexe qui était inconnue : c'est procéder par *synthèse*; ou bien on décompose l'idée complexe inconnue en idées simples connues : c'est procéder par *analyse*. Supposons qu'un homme se trouvant en A demande le chemin pour aller à l'endroit B; on peut lui indiquer, partant de A, tous les endroits par lesquels il doit successivement passer pour arriver à B : c'est la route *synthétique*; on peut aussi lui indiquer les endroits qui mènent de B vers A : c'est la route *analytique*. La première route est la plus naturelle lorsqu'elle mène au but : aussi c'est celle qui est la plus anciennement suivie; mais on n'est pas toujours sûr qu'elle mènera au but, car on ne

(*) Nos philosophes actuels visent à l'éloquence, considérant la philosophie comme une branche de la littérature et non comme une science. Les remarquables ouvrages du P. Gratry ne sont pas exempts de ce défaut.

sait quelle direction prendre; tandis que la route analytique, dès qu'on aboutit à un endroit connu, n'importe lequel, atteint son but.

Les *treize livres des Éléments* sont un chef-d'œuvre de synthèse.

Euclide (— 385), platonicien, voulait probablement rendre accessibles les écrits de son maître et particulièrement le *Timée*, où il est souvent question des polyèdres réguliers (*). Car, chose qui paraît singulière aujourd'hui, les anciens philosophes étaient géomètres. Euclide, partant des idées les plus simples, généralement admises sur l'espace, ajoutant, *synthétisant* vérités sur vérités, parvient au XIIIe livre à l'idée complexe des polyèdres réguliers et démontre les propriétés mentionnées dans le *Timée*. On n'y rencontre aucune évaluation soit d'aires, soit de volumes; c'était étranger au sujet. Il suffit d'un examen superficiel sur le contenu et la forme du XIVe et du XVe livre pour se convaincre qu'ils ne peuvent être d'Euclide. On les attribue à Hypsicle (— 230).

La *Mécanique* de Lagrange est un chef-d'œuvre d'analyse. Il décompose l'idée des *vitesses virtuelles* et en déduit tout ce qu'il est possible de savoir sur le mouvement et ses diverses causes. Toutefois, c'est une grande erreur de croire que jamais Euclide ne fait usage d'analyse et jamais Lagrange de synthèse. C'est une impossibilité logique; mais comme la synthèse domine dans la géométrie et l'analyse dans l'algèbre, chacune de ces sciences a été désignée par sa partie dominante. On a donné le nom de *géométrie analytique* à l'emploi de l'instrument algébrique pour découvrir les propriétés de l'espace. Cette dénomination a le défaut d'être trop ab-

(*) C'est l'opinion très-plausible de Dounot, estimé de Descartes, le plus intelligent des premiers traducteurs en français d'Euclide (1613).

solue, trop exclusive. Aussi un mathématicien qui joignit à un vaste savoir un grand fonds de charlatanisme et qui a souillé à dessein ses œuvres les plus considérables d'une obscurité calculée, d'une profondeur factice, Wronski, substitue à cette dénomination celle de *géomémétrie algorithmique*. Dans un Rapport sur un Mémoire de Wronski, Lagrange et Lacroix ont loué et approuvé cette locution. Elle est en effet très-caractéristique et fait ressortir la différence fondamentale entre la géométrie d'Euclide et celle de Descartes. Dans la première, les figures sont *tracées*, l'œil extérieur suit toujours les mouvements de l'œil intérieur ; tandis que dans la seconde, les figures sont présentées par des signes et ce n'est guère qu'à la fin du procédé logique que l'œil intervient pour opérer *les constructions :* un procédé est graphique et l'autre est purement signalétique, en d'autres termes, purement algorithmique. L'instrument se compose d'*équations* dont le maniement est souvent très-pénible, surtout quand il s'agit d'opérer des éliminations. Dans ces derniers temps, les équations elles-mêmes étant présentées par des *signes*, l'algorithmie géométrique a été considérablement perfectionnée. La combinaison de ces signes, qui se fait pour ainsi dire à vue, amène avec une facilité étonnante des théorèmes d'une extrême généralité et qu'il serait très-pénible d'aborder directement, même en s'aidant de la géométrie graphique. Cette nouvelle algorithmie est exposée avec une grande lucidité, d'une manière très-élémentaire, dans l'ouvrage suivant :

A Treatise of conic Sections, containing on account of some of the most important modern algebraic and geometric methods, by the rev. Georg. Salmon. Second edition, revised and enlarged. Dublin, MDCCCL (*) :

(*) Il existe une troisième édition que nous ne connaissons pas.

Traité des Sections coniques, où l'on rend compte de quelques-unes des plus importantes méthodes modernes, algébriques et géométriques; par le rév. Georg. Salmon. Dublin, 1850; in-8 de 343 pages.

Nous allons donner un spécimen de ces méthodes.

2. Soit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

l'équation d'une droite; axes rectangulaires; p est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite; α l'angle que fait cette perpendiculaire avec la partie positive de l'axe des x. Nous représentons cette équation par

$$\alpha = 0;$$

de même

$$\beta = 0$$

est l'équation

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p' = 0$$

d'une autre droite, etc.

x_1, y_1 étant les coordonnées d'un point, nous désignerons par α_1 l'expression

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p.$$

Il est facile de voir que cette expression est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point x_1y_1 sur la droite $\alpha = 0$; le point $\alpha\beta$ est l'intersection des droites α, β.

3. Soit le triangle ABC :

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0 & \text{équation du côté} & \text{BC}, \\ \beta = 0 & \text{—} & \text{AC}, \\ \gamma = 0 & \text{—} & \text{AB}; \end{array}$$

$$\alpha + l\beta = 0,$$
$$\beta + m\gamma = 0,$$
$$\gamma + n\alpha = 0,$$

sont évidemment les équations de droites passant respectivement par les sommets C, A, B; lorsque l'on a la relation

(1) $$1 + lmn = 0,$$

les trois droites passent par le même point; car une de ces équations est alors la conséquence des deux autres. Une au moins des trois quantités doit être négative. Prenons un point quelconque $x_1 y_1$ sur la droite

$$\alpha + l\beta = 0,$$

on a

$$l = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Au rapport $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ on peut substituer le rapport entre les sinus des angles que fait la droite $\alpha + \lambda\beta$ avec les côtés α et β; de même pour les deux autres droites. On voit d'après cela que les trois bissectrices, les trois médianes, les trois hauteurs satisfont à l'équation (1); donc dans chacun de ces systèmes les trois droites se coupent au même point.

On déduit aussi facilement les propriétés segmentaires.

4. *Bissectrices*. L'équation d'une bissectrice intérieure est

$$\alpha - \beta = 0$$

et celle d'une bissectrice extérieure

$$\alpha + \beta = 0;$$

les quatre droites α, $\alpha - \beta$, β, $\alpha + \beta$ forment un faisceau *harmonique*.

5. *Rapport anharmonique*. Soient

$$\alpha - l_1\beta = 0,$$
$$\alpha - l_2\beta = 0,$$
$$\alpha - l_3\beta = 0,$$
$$\alpha - l_4\beta = 0,$$

les équations des quatre rayons d'un faisceau;

$$\frac{(l_4 - l_2)(l_3 - l_1)}{(l_4 - l_3)(l_2 - l_1)}$$

est le rapport *anharmonique* du faisceau. Il suffit pour s'en convaincre de couper le faisceau par une droite parallèle à l'axe des x. Si ce rapport est égal à -1, il devient *harmonique*.

6. Menons dans le triangle ABC les transversales

CF	coupant	AB en F,
BE	—	AC en E,
AD	—	BC en D,

et supposons que les trois transversales se rencontrent au *même* point O.

Soient

L	le point d'intersection de	FE	et de	BC,
M	—	DF	—	AC,
N	—	DE	—	AB,

on aura

$$l\alpha - m\beta = 0 \quad \text{équation de CF},$$
$$m\beta - n\gamma = 0 \quad \text{— AD},$$
$$n\gamma - l\alpha = 0 \quad \text{— BE},$$
$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0 \quad \text{— EF},$$
$$l\alpha - m\beta + n\gamma = 0 \quad \text{— DF},$$
$$l\alpha + m\beta - n\gamma = 0 \quad \text{— DE};$$

ajoutant les trois dernières équations, on obtient

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

équation d'une droite qui passe par les trois points L, M, N; donc ces trois points sont en ligne droite.

Les quatre droites EN, EA, EF, EB forment un faisceau harmonique, car elles ont pour équations

$$l\alpha + m\beta - n\gamma = 0, \quad \beta = 0,$$
$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0, \quad n\gamma - l\alpha = 0,$$

....

7. Théorème. Soient les deux triangles ABC, A'B'C'. Soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations respectives des côtés BC, AC, AB;

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

les équations respectives des côtés B'C', A'C', A'B'.

Si l'on a les trois relations

$$a\alpha + a'\alpha' = b\beta + b'\beta' = c\gamma + c'\gamma' = 0,$$

les intersections AB, A'B'; BC, B'C'; AC, A'C' sont en ligne droite. On en déduit que les droites AA', BB', CC' passent par le même point, et réciproquement.

Si les trois perpendiculaires abaissées de A sur B'C', de B sur A'C', de C sur A'B' se coupent en un même point, les trois perpendiculaires abaissées de A' sur BC, de B' sur AC; de C' sur BC se coupent aussi en un même point.

Cercle.

8. Théorème. *Soient*

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations des trois côtés du triangle ABC, *le cercle circonscrit a pour équation*

$$\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B = 0.$$

Démonstration.

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$$

est l'équation d'une conique passant par les trois sommets A, B, C, et remplaçant α, β, γ par les équations que ces lettres représentent, on trouve, pour que la conique représente un cercle,

$$l = \sin A, \quad m = \sin B, \quad n = \sin C.$$

Observation. $\alpha_1\beta_1 \sin C + \beta_1\gamma_1 \sin A + \gamma_1 \sin A'$ est le double de l'aire du triangle ayant pour sommets les pieds des trois perpendiculaires abaissées du point x_1, y_1 sur les trois côtés du triangle; l'équation exprime que cette aire s'annule lorsque le point x_1, y_1 est sur la circonférence, c'est-à-dire que les trois pieds sont en ligne droite.

9. L'équation du cercle étant

$$\gamma(\beta \sin A + \alpha \sin B) + \alpha\beta \sin C = 0,$$

montre que la droite

$$\beta \sin A + \alpha \sin B = 0$$

touche le cercle au point C; de même

$$\beta \sin C + \gamma \sin B = 0$$

touche le cercle au point A;

$$\gamma \sin A + \alpha \sin C = 0$$

touche le cercle au point B.

Ces équations montrent intuitivement que les points où les tangentes rencontrent les côtés respectivement opposés du triangle ABC sont en ligne droite.

10. *Lemme.* Soit un triangle formé par deux tangentes à un cercle et par la corde qui joint les points de contact; la distance de chaque point du cercle à la corde est une moyenne proportionnelle géométrique entre le

rectangle des distances du même point aux deux tangentes.

11. Théorème. *Le cercle inscrit au triangle* ABC *a pour équation*

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A + \beta^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}B + \gamma^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}C = 0.$$

Démonstration. Soient A′, B′, C′ les sommets des points de contact situés respectivement sur les côtés BC, AC, AB, et

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

les équations des côtés B′C′, A′C′, A′B′; l'équation du cercle inscrit à ABC, mais circonscrit à A′B′C′, est

$$\alpha'\beta'\sin C' + \beta'\gamma'\sin A' + \gamma'\alpha'\sin B' = 0.$$

Or, d'après le lemme,

$$\alpha'^2 = \beta\gamma, \quad \beta'^2 = \gamma\alpha, \quad \gamma'^2 = \alpha\beta$$

et

$$C' = 90^\circ - \frac{1}{2}C, \quad A' = 90^\circ - \frac{1}{2}A \quad \text{et} \quad B' = 90^\circ - \frac{1}{2}B;$$

donc l'équation du cercle inscrit est

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A + \beta^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}B + \gamma^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}C = 0.$$

Observation. L'équation d'une conique inscrite dans le triangle ABC est en général

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\beta\gamma - 2nl\alpha\gamma - 2ml\alpha\beta = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(l\alpha)^{\frac{1}{2}} + (m\beta)^{\frac{1}{2}} + (n\gamma)^{\frac{1}{2}} = 0;$$

pour le cercle inscrit, on a

$$l = \cos^2 \frac{1}{2} A, \quad m = \cos^2 \frac{1}{2} B, \quad n = \cos^2 \frac{1}{2} C.$$

Nous reviendrons souvent sur cet ouvrage *hors ligne* qui est devenu classique en Angleterre et qui mérite cette distinction partout. Un éditeur intelligent rendrait service au pays par l'importation d'un produit qui nous manque complétement, et, hâtons-nous de le dire, un produit qui n'est pas contraire aux Programmes.

SUR UN THÉORÈME DE M. TCHEBICHEF;

PAR M. ALLEGRET,
Professeur.

Le théorème énoncé par M. de Tchebichef (*) sous le n° **343**, t. XV, p. 353, est démontré, ainsi que plusieurs autres beaucoup plus généraux, au tome XI des *Nouvelles Annales*, p. 422 et 423, dans un intéressant article de M. Lebesgue.

On pourra démontrer, en suivant la même marche, ce théorème négatif :

Si un nombre premier p est de la forme

$$p = 2^{2^\lambda} . n + 1,$$

n désignant un nombre impair, ce nombre n n'est ni une racine primitive de p ni congru à la puissance $n^{ième}$ d'une racine primitive quelconque de p. (On suppose l'exposant entier $\lambda > 0$.)

Je ferai observer que la question résolue par Leonardo

(*) Prononcez Tchebichof.

Pisano (voir *Bulletin*, p. 42, 1856) a été traitée par Diophante, livre I, prop. XXVII et XXVIII. Le problème peut être facilement généralisé et étendu à un nombre quelconque d'inconnues.

SUR LE POLYGONE RÉGULIER DE DIX-SEPT COTÉS;

PAR M. JULES HOÜEL,
Docteur ès Sciences.

Dans le tome II des *Nouvelles Annales*, p. 390, il est fait mention d'une construction donnée par M. de Staudt dans le *Journal* de Crelle, pour le polygone régulier de dix-sept côtés. Voici la traduction du texte très-défectueux comme j'ai cru pouvoir le rétablir.

Menez deux diamètres rectangulaires AB, CD, et par les points D, A, C les tangentes DS, AS, Cc; portez sur Cc, dans le même sens à partir de C, les longueurs $Cc = 2\,AB$, $Ck = 8\,AB$, et tirez Sc, Sk qui coupent, la première le diamètre CD en d, la seconde la circonférence en E, E_1. Par les points e, e_1 où les cordes CE, CE_1 prolongées rencontrent la tangente menée par D, tirez les droites eF, dF_2, e_1F_1, dF_3 qui coupent la circonférence en F, F_1, F_2, F_3. Soient f, f_1, f_2, f_3 les points où les droites DF, DF_1, DF_2, DF_3 coupent la tangente menée par C, et g, g_1, g_2, g_3 les intersections du diamètre CD avec les cordes Sf, Sf_1, Sf_2, Sf_3. Les droites fg_1, f_1g_2, f_2g_3, f_3g couperont la circonférence en huit points tous situés sur le demi-cercle ADB. Enfin, joignons ces huit points au point C, et par les points h_1, h_2, h_3, etc., où ces cordes rencontrent le diamètre AB, élevons sur AB les perpendiculaires A_1A_{16}, A_2A_{15}, A_3A_{14}, etc. La fi-

gure $AA_1 A_2, \ldots, A_{14} A_{15} A_{16}$ sera un heptadécagone régulier.

Quant à la démonstration, je n'ai pas entrepris de la trouver.

Note du Rédacteur. La très-bonne figure jointe à cet écrit ayant besoin d'être *réduite*, nous la supprimons. La description est si claire, que chaque géomètre peut tracer ou faire tracer la figure. Toutefois, si l'on réclame, nous la donnerons plus tard.

QUESTIONS

(voir p. 184).

391. Construire le pentagone ABCDE, connaissant les côtés EA, AB, BC, les diagonales AD, BD, l'angle D et le rapport des côtés DC, DE. (PROUHET.)

392. Si l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

est de degré *pair* et si ses racines peuvent se partager en couples donnant la même somme $2s$, l'équation

$$(2) \qquad f'(x) = 0$$

admettra la racine s et ses autres racines se partageront en couples donnant la même somme $2s$.

Si l'équation (1) est de degré *impair*, ayant une racine égale à s et toutes ses autres racines pouvant se partager en couples dont la somme égale $2s$, les racines de l'équation (2) se partageront aussi par couples donnant la même somme $2s$.

Dans le premier cas, les équations

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{\mathrm{v}}(x) = 0, \ldots,$$

et dans le second les équations

$$f(x)=0,\quad f''(x)=0,\quad f^{\text{iv}}(x)=0,\ldots,$$

auront en commun la racine s. (Prouhet.)

393. *Théorème.* Etant donnée une parabole ABCDE du troisième ordre, représentée par

$$y=a+bx+cx^2+dx^3;$$

on fait passer, par les extrémités A, C, E de trois ordonnées équidistantes y_0, y_1, y_2, la parabole du second ordre dont l'équation aurait la forme

$$y=A+Bx+Cx^2.$$

Ces deux courbes déterminent deux segments curvilignes ABCA, CDEC équivalents entre eux.

Corollaire I. L'aire comprise entre la première courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes y_0, y_2, est donnée par la formule

$$A=\frac{1}{3}\delta(y_0+y_1+4y_1)\ (*).$$

Corollaire II. La formule de quadrature de Simpson, appliquée à la parabole du troisième ordre, est toujours *exacte*, même quand le nombre des valeurs de l'ordonnée se réduit à *trois*. (E. Catalan.)

394. Dans une conique, le rapport *anharmonique* du faisceau de quatre diamètres est égal au rapport anharmonique de quatre diamètres respectivement conjugués. (Salmon.)

395. La polaire réciproque d'un cercle, relativement à

(*) δ est l'intervalle de deux ordonnées consécutives.

un cercle de centre O, est une conique ayant pour foyer O et pour directrice la polaire de O relativement au cercle donné, et $\frac{d}{r}$ pour rapport focal; d égale la distance des centres et r le rayon du cercle donné.

PROBLÈME COMBINATOIRE SUR DES PLANS PASSANT PAR UN SYSTÈME DE POINTS;

PAR M. JULES BOURDIN,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Etant donnés dans l'espace m points dont quatre ne sont pas dans le même plan, trouver le nombre des points nouveaux qui résultent de l'intersection des plans qu'on peut mener par les points donnés.

Le nombre des plans différents qui peuvent passer par les m points pris trois à trois, est donné par la formule

$$C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

Les intersections de ces plans trois à trois, s'ils étaient quelconques, seraient données, en représentant par M le nombre des plans, par la formule analogue

$$(1) \qquad \frac{M(M-1)(M-2)}{1.2.3}.$$

Mais ces plans ont été menés par les m points donnés; la formule (1) énumère outre les points cherchés: 1° les points donnés, 2° des droites passant par les points donnés, 3° des points multiples.

De là trois corrections à faire subir à la formule (1), si

l'on ne veut obtenir que les points nouveaux et ne compter chacun qu'une seule fois.

Première correction.

Par un des points donnés il passe autant de plans qu'on peut mener de droites par les $(m-1)$ points restants, c'est-à-dire $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$. Je désigne ce nombre par N; si je prends maintenant toutes les combinaisons de ces N points trois à trois, j'aurai le nombre des intersections qui se confondent avec le point donné. Ce nombre est $\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}$, la première correction sera donc

$$-m\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}.$$

Deuxième correction.

Il est à remarquer que dans le cas général pour qu'il passe plus de deux plans par une même droite, il faut que cette droite joigne deux des points donnés, a et b par exemple; la droite ab est alors l'intersection commune de $(m-2)$ plans dont les combinaisons trois à trois

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$

sont comprises dans la formule, mais qui par la première correction ont été retranchées comme se confondant avec le point donné a; ces mêmes combinaisons ont également été retranchées comme se confondant avec le point b; il faudra donc comme deuxième correction ajouter le nombre

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}$$

autant de fois qu'on peut mener de droites par les m points

donnés, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1.2}$ fois. La deuxième correction est donc

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\times\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3},$$

ou, en multipliant et divisant par 10,

$$+10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}.$$

Troisième correction.

Nous avons vu plus haut que les droites qui joignent les points donnés deux à deux étaient les seules qui fussent formées par l'intersection de plus de deux plans. Les points multiples, c'est-à-dire ceux qui donnent les intersections de plus de trois plans, se trouveront donc par l'intersection de ces droites avec les plans menés par les $(m-2)$ points étrangers à la droite, pris trois à trois, et dont le nombre sera

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}.$$

On voit ainsi qu'il y aura sur chacune des $\frac{m(m-1)}{1.2}$ droites qui joignent les points deux à deux,

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}$$

points cherchés et qui chacun auront été comptés par la formule (1) autant de fois qu'il y a de combinaisons deux à deux des $(m-2)$ plans qui forment une droite, c'est-à-dire $\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}$ fois. La troisième et dernière correc-

tion sera donc

$$-\frac{m(m-1)}{1.2}$$

$$\times\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-1\right],$$

ou, en multipliant et divisant par 10,

$$-10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\times\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-1\right].$$

Le nombre des points cherchés sera donc compris dans la formule

$$\frac{M(M-1)(M-2)}{1.2.3}-m\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}$$

$$-10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\times\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-2\right],$$

en posant

$$M=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

et

$$N=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}.$$

Note. Ce problème a déjà été traité dans le *Journal* de M. Liouville, t. V, p. 264, mais on n'a pas eu égard à la première et à la troisième correction.

NOTE SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON.

Si $F(x)$ représente une fonction algébrique entière dont le degré ne soit pas supérieur au nombre entier m, et qui prenne les $(m+1)$ valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-2}, u_{m-1}, u_m$ lorsqu'on y remplace la variable x par les $m+1$ valeurs différentes $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m$, on sait que

$$\begin{aligned} F(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{m-1})(x_0-x_m)} u_0 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x_1-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{m-1})(x_1-x_m)} u_1 + \ldots \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_m)}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\ldots(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)} u_{m-1} \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-2})(x_m-x_{m-1})} u_m. \end{aligned}$$

C'est la formule d'interpolation de Lagrange.

Nous allons établir, au moyen de cette formule, un principe qui nous sera utile; en voici l'énoncé :

Soit $f(x)$ le produit des $(m+1)$ facteurs consécutifs x, $(x+1)$, $(x+2), \ldots, (x+m-1)$, $(x+m)$; on aura, pour toute valeur de x,

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & 1.2.3\ldots(m-1)m = \frac{f(x)}{x} - m \cdot \frac{f(x)}{x+1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{f(x)}{x+2} \\ & - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \frac{f(x)}{x+3} + \ldots \\ & \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \frac{f(x)}{x+p} \mp \ldots \mp m \cdot \frac{f(x)}{x+m-1} \pm \frac{f(x)}{x+m}. \end{aligned} \right.$$

tion sera donc

$$-\frac{m(m-1)}{1.2}$$

$$\times\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-1\right],$$

ou, en multipliant et divisant par 10,

$$-10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\times\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-1\right].$$

Le nombre des points cherchés sera donc compris dans la formule

$$\frac{M(M-1)(M-2)}{1.2.3}-m\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}$$

$$-10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\times\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-2\right],$$

en posant

$$M=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

et

$$N=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}.$$

Note. Ce problème a déjà été traité dans le *Journal* de M. Liouville, t. V, p. 264, mais on n'a pas eu égard à la première et à la troisième correction.

NOTE SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON.

Si $F(x)$ représente une fonction algébrique entière dont le degré ne soit pas supérieur au nombre entier m, et qui prenne les $(m+1)$ valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-2}, u_{m-1}, u_m$ lorsqu'on y remplace la variable x par les $m+1$ valeurs différentes $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_m$, on sait que

$$\begin{aligned}F(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{m-1})(x_0-x_m)}\,u_0 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x_1-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{m-1})(x_1-x_m)}\,u_1 + \ldots \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_m)}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\ldots(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)}\,u_{m-1} \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-2})(x_m-x_{m-1})}\,u_m.\end{aligned}$$

C'est la formule d'interpolation de Lagrange.

Nous allons établir, au moyen de cette formule, un principe qui nous sera utile; en voici l'énoncé:

Soit $f(x)$ le produit des $(m+1)$ facteurs consécutifs x, $(x+1)$, $(x+2)$, ..., $(x+m-1)$, $(x+m)$; on aura, pour toute valeur de x,

$$\begin{aligned}1.2.3\ldots(m-1)m = {} & \frac{f(x)}{x} - m\cdot\frac{f(x)}{x+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{f(x)}{x+2} \\ & - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{f(x)}{x+3} + \ldots \\ & \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\,\frac{f(x)}{x+p} \mp \ldots \mp m\cdot\frac{f(x)}{x+m-1} \pm \frac{f(x)}{x+m}.\end{aligned}$$

puis, en éliminant $\cos C$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{S}{2} &= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \\ &= \frac{\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Or on a

$$1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a \cos b \cos c$$

et

$$-1 + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

égaux respectivement à

$$4\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$4\cos c\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

Il résulte de là que

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \tan^2\frac{S}{4} &= \frac{1-\cos\frac{S}{2}}{1+\cos\frac{S}{2}} \\ &= \tan\left(\frac{a+b+c}{4}\right)\tan\left(\frac{-a+b+c}{4}\right)\tan\left(\frac{a-b+c}{4}\right)\tan\left(\frac{a+b-c}{4}\right); \end{aligned}\right.$$

c'est la formule de Lhuilier.

Si l'on représente par α, β, γ les arcs de grand cercle qui unissent les milieux des côtés a, b, c, on déduit de l'équation (1), à cause de

$$\cos\gamma = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C,$$

les suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\gamma &= \cos\frac{S}{2}\cos\frac{c}{2},\\ \cos\beta &= \cos\frac{S}{2}\cos\frac{b}{2},\\ \cos\alpha &= \cos\frac{S}{2}\cos\frac{a}{2}.\end{aligned}\right.$$

Si nous représentons par A', B', C' les milieux des côtés a, b, c, on sait que le volume V' du parallélipipède, dont les deux arêtes contiguës sont OA', OB', OC' (O étant le centre de la sphère), est donné par l'équation

$$\begin{aligned} V'^2 &= 1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &= 1 - \cos^2\frac{S}{2}\left(\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2}\right) \\ &\quad + 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos^3\frac{S}{2}.\end{aligned}$$

Mais l'équation (2) donne

$$\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{S}{2} = 1;$$

de sorte qu'on a

$$(5)\qquad V'^2 = 1 - \cos^2\frac{S}{2} = \sin^2\frac{S}{2} \quad \text{ou} \quad V' = \sin\frac{S}{2}.$$

Ce théorème est de M. Cornélius Keogh, qui a fait d'ingénieuses recherches sur la trigonométrie.

Cette expression du volume V' montre bien que le nom de sinus de l'angle solide OA'B'C' donné à V' est mal choisi. Il a été employé par M. Staudt, avec lequel M. Keogh s'est rencontré dans des recherches relatives aux polygones.

CONSTRUCTION DE LA TANGENTE,

Du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques.

Applications à la détermination du centre de courbure des coniques;

PAR M. MANNHEIM.

---

1. Soient o_1 et o_2 (*) deux circonférences se coupant aux points c, f. Par le point c, menons une droite arbitraire qui coupe la circonférence o_1 au point a et la circonférence o_2 au point b; sur ab, construisons un triangle abd semblable à un triangle donné : *le lieu décrit par le point* d *lorsque la droite* ab *tourne autour du point* c, *est une circonférence* o_3 *passant par le point* f (**).

2. Au point a menons la tangente T_1 à la circonférence o_1 et au point b la tangente T_2 à la circonférence o_2. T_1 et T_2 se coupent au point i; la circonférence aib passe par le point f. En menant au point d la tangente T_3 à la circonférence o_3, on obtiendra de même deux autres circonférences se coupant en f.

3. Dans le cas particulier où le point d est en d_1 sur ab, de telle façon que $\frac{ad_1}{d_1b}$ = constante, *le lieu des points*

(*) On est prié de faire la figure. Il est commode de placer le point d de façon que le point f soit à l'intérieur du triangle abd.

(**) Je ne démontre pas ce théorème, que l'on énonce plus complétement de la manière suivante :

Sur les droites telles que ab *on construit des figures semblables à une figure donnée, les points homologues décrivent des circonférences passant par le point f, les cotés homologues tournent autour de points fixes.*

d_1 *est la circonférence* o_4 *passant en* c *et en* f (*).

Observation. Nous conserverons toujours d pour le cas général et d_1 pour le cas particulier.

4. T_4 étant la tangente en d_1 à la circonférence o_4, le point f est commun aux circonférences circonscrites aux quatre triangles déterminés par les droites T_1, T_2, T_4 et ab.

Cette remarque permet de résoudre la question suivante :

5. *Pour un mouvement infiniment petit d'une droite* ab, *le point* a *parcourt un élément d'une droite* T_1, *le point* b *un élément d'une droite* T_2, *le point* d_1, *qui partage* ab *dans un rapport constant, un élément d'une droite* T_4 ; *on demande autour de quel point la droite* ab *a tourné.*

On détermine le point f en circonscrivant des circonférences aux quatre triangles formés par les droites T_1, T_2, T_4 et ab ; on décrit une circonférence passant par le point f et tangente en d_1 à la droite T_4 : cette circonférence coupe la droite ab au point cherché.

6. Revenons au cas général (1). Au point a traçons une courbe quelconque L tangente à la circonférence o_1, au point b une courbe quelconque M tangente à o_2, au point c une courbe quelconque H tangente à ab. Lorsque la droite ab se meut en restant tangente à la courbe H, ses extrémités parcourant les courbes L, M, le sommet d du triangle abd construit sur ab et semblable à un triangle

(*) Si l'on transforme cette proposition par la méthode des rayons vecteurs réciproques en prenant le point c pour pôle de transformation, on retrouve une proposition connue. Cette dernière proposition est un cas particulier de celle qui résulte de la transformation de (1), le point c étant toujours pris pour pôle de transformation.

CONSTRUCTION DE LA TANGENTE,

Du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques.

Applications à la détermination du centre de courbure des coniques;

PAR M. MANNHEIM.

1. Soient o_1 et o_2 (*) deux circonférences se coupant aux points c, f. Par le point c, menons une droite arbitraire qui coupe la circonférence o_1 au point a et la circonférence o_2 au point b; sur ab, construisons un triangle abd semblable à un triangle donné : *le lieu décrit par le point* d *lorsque la droite* ab *tourne autour du point* c, *est une circonférence* o_3 *passant par le point* f (**).

2. Au point a menons la tangente T_1 à la circonférence o_1 et au point b la tangente T_2 à la circonférence o_2. T_1 et T_2 se coupent au point i; la circonférence aib passe par le point f. En menant au point d la tangente T_3 à la circonférence o_3, on obtiendra de même deux autres circonférences se coupant en f.

3. Dans le cas particulier où le point d est en d_1 sur ab, de telle façon que $\frac{ad_1}{d_1 b}$ = constante, *le lieu des points*

(*) On est prié de faire la figure. Il est commode de placer le point d de façon que le point f soit à l'intérieur du triangle abd.

(**) Je ne démontre pas ce théorème, que l'on énonce plus complétement de la manière suivante :

Sur les droites telles que ab *on construit des figures semblables à une figure donnée, les points homologues décrivent des circonférences passant par le point* f, *les cotés homologues tournent autour de points fixes.*

d_1 *est la circonférence* o_4 *passant en* c *et en* f (*).

Observation. Nous conserverons toujours d pour le cas général et d_1 pour le cas particulier.

4. T_4 étant la tangente en d_1 à la circonférence o_4, le point f est commun aux circonférences circonscrites aux quatre triangles déterminés par les droites T_1, T_2, T_4 et ab.

Cette remarque permet de résoudre la question suivante :

5. *Pour un mouvement infiniment petit d'une droite* ab, *le point* a *parcourt un élément d'une droite* T_1, *le point* b *un élément d'une droite* T_2, *le point* d_1, *qui partage* ab *dans un rapport constant, un élément d'une droite* T_4 ; *on demande autour de quel point la droite* ab *a tourné.*

On détermine le point f en circonscrivant des circonférences aux quatre triangles formés par les droites T_1, T_2, T_4 et ab; on décrit une circonférence passant par le point f et tangente en d_1 à la droite T_4 : cette circonférence coupe la droite ab au point cherché.

6. Revenons au cas général (1). Au point a traçons une courbe quelconque L tangente à la circonférence o_1, au point b une courbe quelconque M tangente à o_2, au point c une courbe quelconque H tangente à ab. Lorsque la droite ab se meut en restant tangente à la courbe H, ses extrémités parcourant les courbes L, M, le sommet d du triangle abd construit sur ab et semblable à un triangle

---

(*) Si l'on transforme cette proposition par la méthode des rayons vecteurs réciproques en prenant le point c pour pôle de transformation, on retrouve une proposition connue. Cette dernière proposition est un cas particulier de celle qui résulte de la transformation de (1), le point c étant toujours pris pour pôle de transformation.

CONSTRUCTION DE LA TANGENTE,

Du point de contact d'une droite avec son enveloppe pour certains lieux géométriques.

Applications à la détermination du centre de courbure des coniques ;

PAR M. MANNHEIM.

1. Soient o_1 et o_2 (*) deux circonférences se coupant aux points c, f. Par le point c, menons une droite arbitraire qui coupe la circonférence o_1 au point a et la circonférence o_2 au point b; sur ab, construisons un triangle abd semblable à un triangle donné : *le lieu décrit par le point* d *lorsque la droite* ab *tourne autour du point* c, *est une circonférence* o_3 *passant par le point* f (**).

2. Au point a menons la tangente T_1 à la circonférence o_1 et au point b la tangente T_2 à la circonférence o_2. T_1 et T_2 se coupent au point i; la circonférence aib passe par le point f. En menant au point d la tangente T_3 à la circonférence o_3, on obtiendra de même deux autres circonférences se coupant en f.

3. Dans le cas particulier où le point d est en d_1 sur ab, de telle façon que $\frac{ad_1}{d_1 b}$ = constante, *le lieu des points*

(*) On est prié de faire la figure. Il est commode de placer le point d de façon que le point f soit à l'intérieur du triangle abd.

(**) Je ne démontre pas ce théorème, que l'on énonce plus complétement de la manière suivante :

Sur les droites telles que ab *on construit des figures semblables à une figure donnée, les points homologues décrivent des circonférences passant par le point* f, *les cotés homologues tournent autour de points fixes.*

d_1 *est la circonférence* o_4 *passant en* c *et en* f (*).

Observation. Nous conserverons toujours d pour le cas général et d_1 pour le cas particulier.

4. T_4 étant la tangente en d_1 à la circonférence o_4, le point f est commun aux circonférences circonscrites aux quatre triangles déterminés par les droites T_1, T_2, T_4 et ab.

Cette remarque permet de résoudre la question suivante :

5. *Pour un mouvement infiniment petit d'une droite* ab, *le point* a *parcourt un élément d'une droite* T_1, *le point* b *un élément d'une droite* T_2, *le point* d_1, *qui partage* ab *dans un rapport constant, un élément d'une droite* T_4; *on demande autour de quel point la droite* ab *a tourné.*

On détermine le point f en circonscrivant des circonférences aux quatre triangles formés par les droites T_1, T_2, T_4 et ab; on décrit une circonférence passant par le point f et tangente en d_1 à la droite T_4: cette circonférence coupe la droite ab au point cherché.

6. Revenons au cas général (1). Au point a traçons une courbe quelconque L tangente à la circonférence o_1, au point b une courbe quelconque M tangente à o_2, au point c une courbe quelconque H tangente à ab. Lorsque la droite ab se meut en restant tangente à la courbe H, ses extrémités parcourant les courbes L, M, le sommet d du triangle abd construit sur ab et semblable à un triangle

---

(*) Si l'on transforme cette proposition par la méthode des rayons vecteurs réciproques en prenant le point c pour pôle de transformation, on retrouve une proposition connue. Cette dernière proposition est un cas particulier de celle qui résulte de la transformation de (1), le point c étant toujours pris pour pôle de transformation.

donné, décrit une courbe N dont on obtient la tangente au point d de la manière suivante : Par le point de contact c de ab et de H, on décrit une circonférence o_1 tangente à L au point a, et une circonférence o_2 tangente à M au point b; o_1 coupe ad en e, o_2 coupe bd en g. Les quatre points d, e, f, g sont sur une même circonférence o_3. On mène au point d la tangente T_3 à cette circonférence et l'on a la tangente cherchée.

7. Réciproquement, connaissant T_3, on peut déterminer c en s'appuyant sur ce qu'on a dit plus haut (2).

8. Dans le cas particulier où l'on considère le point d_1 (3), les points e, g se confondent en c, et l'on a la circonférence o_4 passant par les points cfd pour déterminer la tangente T_4 au lieu décrit par le point d_1 (*).

9. Les circonférences o_1, o_2 et o_4 passent par les mêmes deux points c, f.

Dans ces circonférences, les extrémités a', d_1', b' des diamètres qui passent par les points a, d_1, b sont sur une droite ca' perpendiculaire à la droite acb; on a d'après (3)

$$\frac{a'd'_1}{d'_1b'} = \frac{ad_1}{d_1b}.$$

Les diamètres aa', bb' sont connus, puisque ce sont les normales aux courbes L, M. On déterminera le point d'_1, et, par suite, $d'd_1$ qui est normale à la courbe décrite par d_1 (**).

10. Réciproquement, connaissant T_4, on peut déter-

(*) Pour déterminer T_4, on peut remplacer les courbes L, M par leurs tangentes T_1, T_2 ; le lieu décrit par le point d_1 est alors une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux droites T_1, T_2 ; on détermine ces asymptotes, et, par suite, T_4.

(**) Pour un mouvement infiniment petit de ab, les normales aux courbes décrites par tous les points tels que d_1 enveloppent une parabole tangente aux droites ca, ca'.

miner c comme on l'a dit (5) en remplaçant les courbes données par leurs tangentes.

On peut aussi tracer les normales aa', $d_1 d'_1$, bb', puis chercher une droite perpendiculaire à ab qui soit coupée par ces normales aux points a', d'_1, b', de façon que

$$\frac{a'd'_1}{d'_1 b'} = \frac{ad_1}{d_1 b}.$$

Cette droite, qu'il est facile de déterminer, coupe ab au point cherché.

Remarque. Soit j le point de rencontre de aa' et de bb', menons jd'_1 et abaissons du point j une perpendiculaire sur ab; cette perpendiculaire, les droites ja, jb et jd'_1 forment un faisceau dont le rapport anharmonique est $\frac{ad_1}{d_1 b}$.

11. On déduit de la proposition suivante plusieurs constructions pour obtenir le point c.

PROBLÈME. *Trois droites* T_1, T_2, T_4 *étant données, on mène une droite* ab *qui coupe* T_1 *au point* a, T_2 *au point* b *et* T_4 *au point* d_1; *on a*

$$\frac{ad_1}{d_1 b} = \text{constante}.$$

On demande l'enveloppe de ab *et le point* c *où elle touche son enveloppe* (Géom. sup., p. 552).

Solution. Soient t et t' les points où T_4 coupe T_1 et T_2. On a

$$\frac{ad_1}{d_1 b} = \frac{ta \sin(T_1, T_4)}{t'b \sin(T_2, T_4)},$$

d'où

$$\frac{ta}{t'b} = \text{constante}.$$

L'enveloppe de ab *est donc une parabole tangente aux trois droites données.*

Pour déterminer c, on a

$$\frac{ac}{cd_1} = \frac{ib}{bt'}, \quad \frac{cd_1}{d_1 b} = \frac{at}{ti}.$$

D'où les constructions suivantes :

1°. Du point d_1 on mène une parallèle à T_2, cette droite coupe tb en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_1 qui coupe ab au point cherché. On a une construction analogue en menant at', etc.

2°. Par le point t on mène une parallèle à ab, par le point a une parallèle à T_2, ces deux droites se coupent en un certain point, la droite qui le joint au point t' coupe ab au point c. De même en menant par le point t' une parallèle à ab, etc.

3°. Par le point b on mène une parallèle à T_4, cette droite coupe id_1 en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_1 qui coupe ab au point c. De même pour le point a, etc.

4°. Par le point b on mène une parallèle à T_1, cette droite coupe at' en un certain point; de ce point on mène une parallèle à T_4 qui coupe ab au point c. De même pour le point a, etc.

Ces constructions, à l'exception de la dernière, donnent T_4 en opérant inversement.

12. Lorsque la courbe L se confond avec H, le point a' est le centre de courbure de la courbe H et la circonférence o_1 est décrite sur le rayon de courbure comme diamètre.

Cette remarque permet de déterminer la tangente au lieu décrit par le sommet de triangles semblables construits sur la portion de tangente comprise entre son point de contact et un point où elle coupe une courbe

quelconque, et, par suite, à la courbe décrite par un point qui partage cette portion de tangente dans un rapport constant. Réciproquement, connaissant cette tangente, on peut déterminer le centre de courbure de la courbe H.

Applications à la recherche des centres de courbure des coniques (*).

13. Soient A et B le grand axe et le petit axe d'une ellipse, o le centre de l'ellipse, m un point quelconque de cette courbe, T et N la tangente et la normale passant en ce point.

T coupe A au point t et B au point t',
N coupe A au point n et B au point n'.

On sait que $\frac{mn}{mn'}$ est constant.

Pour un mouvement infiniment petit de N, n parcourt A, n' parcourt B et m parcourt T; on demande le point autour duquel la droite N a tourné, c'est-à-dire le centre de courbure (5).

Il faut pour cela chercher le point f en circonscrivant des circonférences aux triangles déterminés par les droites A, B, T, N, puis décrire par ce point une circonférence tangente à T au point m; cette circonférence coupe N au point cherché.

Il n'est pas même nécessaire de décrire aucune circonférence. En effet le point f est le point de rencontre de tn' et de $t'n$ comme il est facile de le voir en remarquant que les angles (T, N) et (A, B) sont droits. On joint le point f au point m, on élève fc perpendiculaire à fm, le point

(*) *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure*, in-8 de 84 p.; 1857. M. Ernest Lamarle détermine les centres de courbure par un mouvement de rotation analogue au mouvement de translation de Roberval pour les tangentes. Quel moyen cynématique employer pour les osculations d'ordre supérieur? TM.

de rencontre c de cette ligne et de N est le centre de courbure cherché.

14. Le point f est le foyer de la parabole tangente aux droites A, B, T, N; l'angle (T, N) étant droit, le point m est un point de la directrice de cette parabole, et, par suite, c est le point où cette courbe touche N.

On peut déduire de là que :

La parabole tangente aux axes d'une ellipse à la tangente et à la normale passant par un point donné touche cette normale au centre de courbure de l'ellipse.

15. La circonférence cfm coupe tn' en f',

$$\widehat{cf'n'} = \widehat{cmf} = \widehat{otn'},$$

donc cf' est parallèle à A, et, par suite, mf' à B, ce qui donne une nouvelle construction du centre de courbure. On peut aussi considérer le point de rencontre f'' de la circonférence cfm et de $t'n$, la droite mf'' est parallèle à A et cf'' à B (*).

16. Par le point n on mène B' parallèle à B; par le point n', A' parallèle à A. Il faut, pour obtenir c (10) mener une droite parallèle à T et qui soit partagée par N, A', B' dans le rapport $\frac{mn}{mn'}$.

La construction se réduit à mener par le point l, intersection de B' et de tn', une parallèle à T. Cette droite coupe N au centre de courbure.

(*) J'étais arrivé depuis longtemps à ce résultat en construisant directement l'abscisse du centre de courbure $\xi = \frac{c^2 x^3}{a^4}$.

Soit q le point où mf'', parallèle à A, coupe B, on a

$$\frac{qf''}{on} = \frac{qm}{ot} \quad \text{ou} \quad \frac{\xi}{\frac{c^2 x}{a^2}} = \frac{x}{\frac{a^2}{x}},$$

d'où etc.

17. Ce que l'on vient de dire (14, 15, 16) peut se conclure du n° 11 ; on peut en outre déterminer c à l'aide des autres constructions indiquées dans ce numéro.

18. A partir du point m sur N je porte $ms = ms' =$ le demi-diamètre conjugué de om.

On sait que os est égal à la demi-somme des axes et que os' est égal à leur demi-différence. Pour un mouvement infiniment petit de N, les points s, s' décrivent des arcs de cercle et le point m, milieu de ss', un élément de T; les normales à ces trois courbes sont os, os' et N. En appliquant la remarque du n° 10, on conclut que oc, os, os' et la perpendiculaire abaissée du point O sur N forment un faisceau harmonique. On a donc

$$\rho = \frac{d^2}{h},$$

en appelant ρ le rayon de courbure mc, h la distance du point o à T et d le demi-diamètre conjugué de om. Cette expression de ρ est connue, nous la retrouverons plus loin comme cas particulier.

19. *Une droite* ab, *corde d'une certaine courbe* N, *détache de cette courbe un segment d'aire constante; on demande, pour une position de* ab, *le centre de courbure de la courbe enveloppée par cette corde.*

Au milieu de ab on élève une perpendiculaire, on prend le milieu de la portion de cette droite comprise entre les points où elle est coupée par les normales menées à la courbe N aux points a, b; ce point milieu est le centre de courbure cherché (12).

Comme cas particulier, on a l'hyperbole lorsque la courbe N se réduit à deux droites.

Voici un autre cas particulier :

Soient une ellipse dont le centre est o (*), m un point de la courbe et T la tangente en ce point. A partir du point m sur T, on porte deux longueurs égales ma, mb. On peut considérer ab comme la corde d'une ellipse semblable à o; la corde détachant un segment d'aire constante, le point m décrit l'ellipse donnée; on peut donc appliquer la construction précédente. Pour obtenir les normales aux points a et b, on opérera de la manière suivante.

Au point a on mène la tangente aa' à l'ellipse donnée, a' est le point de contact, la perpendiculaire abaissée du point a sur ma' est la normale cherchée; de même pour le point b. Les deux normales coupent la normale au point m, etc.

De cette construction, on déduira facilement ce qui suit:

Au point a on mène une parallèle à mb', au point b une parallèle à ma', ces deux droites se coupent en un certain point; H désigne la distance de ce point à T. D étant la longueur ma, on a

$$\rho = \frac{D^2}{H}.$$

Dans le cas particulier où D est égal au demi-paramètre conjugué de om, la construction précédente se simplifie et l'expression du rayon de courbure devient celle qui a été donnée (18).

20. On peut chercher le centre de courbure de la parabole en s'appuyant sur cette propriété que la tangente au sommet partage en deux parties égales la portion de tangente comprise entre la courbe et l'axe.

21. Soit bfc un triangle rectangle mobile et variable dont le sommet de l'angle droit est fixe en f et dont l'hy-

---

(*) On est prié de faire une figure particulière.

poténuse bc est tangente à une circonférence donnée o. Le point c est le point de contact mobile ; on demande la normale au lieu décrit par le point b.

Le milieu a de bc décrit une droite, axe radical de f et de o.

A l'aide de cette remarque, on trouvera facilement la construction suivante :

Par le point a on mène une parallèle à fo ; cette droite, perpendiculaire à l'axe radical, coupe le rayon oc au point a'. On prolonge oa' d'une longueur égale à elle-même jusqu'en b', bb' est la normale cherchée.

$b'a$ prolongée coupe of au point e et l'on a

$$b'a = ae.$$

Cette remarque nous sera utile.

22. Considérons une conique ayant pour cercle osculateur la circonférence o de la question précédente et pour foyer le point f.

Le point b parcourt la directrice, on connaît donc bb'. bb' coupe la normale co au point b', joignons ce point au point a, milieu de bc, prolongeons $b'a$ d'une longueur égale à elle-même jusqu'en e.

Les droites ef et $b'c$ se coupent au centre de courbure.

On peut facilement transformer cette construction de la manière suivante : Du point c on abaisse une perpendiculaire sur la directrice, au b on élève une perpendiculaire à bc, ces deux droites se coupent en un point d, df coupe la normale co au centre de courbure.

Cette construction est applicable aux trois coniques.

En considérant la seconde directrice, on obtient une nouvelle droite passant par le centre de courbure. On est ainsi conduit à la construction suivante :

On élève une perpendiculaire à la tangente au point où elle coupe l'axe parallèle aux directrices ; cette droite

coupe la parallèle cg à l'autre axe au point g. La droite qui joint g au centre de la conique coupe la normale au centre de courbure cherché.

23. Pour terminer, énonçons quelques questions que l'on traitera facilement :

1°. *On donne trois courbes* A, B, C *et un point fixe* o *par lequel on mène une transversale arbitraire qui coupe les courbes aux points* a, b, c; *on prend sur cette transversale un point* d *tel, que* $\frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{ab}}$ = *constante. On demande la tangente au lieu décrit par le point* d (*).

Comme cas particulier, on a la conchoïde du cercle, la cissoïde de Dioclès, etc.

Si la courbe C se réduit au point o et si les lignes A et B sont droites, le rapport $\frac{od}{ab}$ étant 1, le lieu des points d est une hyperbole; on a alors la construction suivante qui nous a été donnée par M. Moutard.

Soit f le point de rencontre de A et B; on prolonge fb d'une longueur égale à elle-même jusqu'en g, dg est la tangente cherchée. On applique cette construction dans le cas où les lignes A et B sont quelconques en les remplaçant par leurs tangentes.

2°. *Étant données deux droites* A, B *et une courbe* C, *d'un point de la courbe on mène des parallèles aux droites fixes, on joint les points* a, b *où ces parallèles coupent* A, B; *on demande le point où* ab *touche son enveloppe.*

3°. *On partage le rayon de courbure d'une courbe donnée dans un rapport constant; ces différents points déterminent une courbe dont on demande de construire la normale.*

(*) Les points a doivent être *consécutifs* sur la courbe A; de même les points b, c. TM.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 361

(voir page 58);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le plan B on mène un plan quelconque déterminant un tétraèdre T de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T. On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante.}$$

(FAURE.)

Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_6, y_6, z_6$ les coordonnées des points S, A, B, L, M, N; nous désignons par L, M, N les points où le plan mené par le point B rencontre les arêtes du trièdre. Les coordonnées des trois premiers points ainsi que les angles α, β, γ des arêtes avec les axes sont des quantités déterminées, et λ, μ, ν, qui représentent les longueurs SL, SM, SN, des quantités variables.

Les équations des arêtes seront

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x_4 - x_1}{\alpha_1} &= \frac{y_4 - y_1}{\beta_1} = \frac{z_4 - z_1}{\gamma_1} = \lambda, \\ \frac{x_5 - x_1}{\alpha_2} &= \frac{y_5 - y_1}{\beta_2} = \frac{z_5 - z_1}{\gamma_2} = \mu, \\ \frac{x_6 - x_1}{\alpha_3} &= \frac{y_6 - y_1}{\beta_3} = \frac{z_6 - z_1}{\gamma_3} = \nu \end{aligned}\right.$$

Désignons par V_1, V_2, V_3, V_4 les volumes des pyra-

mides SALM, SALN, SAMN, ALMN; nous aurons

$$6V_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}$$

Remplaçons dans ce déterminant x_4, y_4, z_4, x_5, y_5, z_5 par leurs valeurs tirées des équations (1) et retranchons des éléments des trois dernières lignes ceux de la première, il viendra

$$6V_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & \lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1 & \lambda\gamma_1 \\ 0 & \mu\alpha_2 & \mu\beta_2 & \mu\gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu A;$$

on trouvera de même

$$6V_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\nu B$$

$$6V_3 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mu\nu C,$$

A, B, C représentant, comme on voit, des quantités connues.

On a enfin

$$6V_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}$$

Si nous remplaçons x_4, y_4, z_4, x_5, y_5, z_5, x_6, z_6, z_6 par leurs valeurs tirées des équations (1), les éléments des trois dernières lignes du déterminant résulteront de la somme de deux quantités, ce qui nous permettra de le décomposer. Nous trouvons ainsi

$$6V_4 = -\lambda\mu A + \lambda\nu B - \mu\nu C + \lambda\mu\nu D,$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Cette transformation devient plus facile, si l'on a soin de retrancher les éléments ligne par ligne quand l'occasion s'en présente. D'un autre côté, les quatre points B, L, M, N étant dans un même plan, on a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} = 0,$$

et, à cause des trois points S, A, B en ligne droite,

$$(3) \qquad \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \rho.$$

Le déterminant (2), à cause des équations (1), nous donne

$$-\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda\mu\nu D = 0\ (^*).$$

(*) Il suffit pour obtenir cette relation de remplacer x_2, y_2, z_2 par x_3, y_3, z_3 dans le développement du déterminant qui représente $6V_4$.

On peut conclure de là, à cause des équations (3),

$$-\rho(-\lambda\mu A + \lambda\nu B - \lambda\mu\nu C) = \lambda\mu\nu D,$$

et, par conséquent,

$$6V_1 = \lambda\mu\nu\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) D.$$

Mais on a, comme on sait,

$$6V = \lambda\mu\nu D,$$

d'où, en combinant les relations obtenues,

$$\frac{P}{V^3} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) A.B.C.D}{6D^3},$$

quantité constante, puisqu'elle est indépendante des variables λ, μ, ν.

SOLUTION DE LA QUESTION 370

(voir page 127);

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Soit un déterminant complet dans lequel les éléments conjugués sont des nombres imaginaires conjugués et les éléments principaux des nombres réels. Le déterminant est réel.

Un déterminant du second ordre ainsi composé est évidemment réel; nous allons montrer que le théorème étant vrai pour un déterminant de l'ordre $m - 1$ l'est aussi pour celui de l'ordre n. Soit A un déterminant de l'ordre n satisfaisant aux conditions indiquées; développons-le suivant les éléments de la dernière colonne et

suivant ceux de la dernière ligne, nous aurons

$$2A = a_{1,n}\alpha_{1,n} - a_{2,n}\alpha_{2,n} + \ldots \pm a_{n,n}\alpha_{n,n}$$
$$+ a_{n,1}\alpha_{n,1} - a_{n,2}\alpha_{n,2} + \ldots \pm a_{n,n}\alpha_{n,n},$$

en représentant, pour abréger, par $\alpha_{r,s}$ ce que devient le déterminant A lorsqu'on y efface les éléments de la $r^{ième}$ ligne et ceux de la $s^{ième}$ colonne. On remarquera que d'après la composition du déterminant A, $\alpha_{s,r}$ s'obtient en changeant dans $\alpha_{r,s}$, $i = \sqrt{-1}$ en $-i$.

Par conséquent, pour

$$\alpha_{r,s} = P + Qi,$$

on aura

$$\alpha_{s,r} = P - Qi.$$

De même à une valeur de

$$a_{r,s} = p + qi$$

correspond une valeur de

$$a_{s,r} = p - qi.$$

On aura donc en général

$$a_{r,s}\alpha_{r,s} + a_{s,r}\alpha_{s,r} = 2pP + 2qQ.$$

Enfin $a_{n,n}\alpha_{n,n}$ est aussi réel, puisque par hypothèse l'élément $a_{n,n}$ est réel ainsi que le déterminant du $(n-1)^{ième}$ ordre $\alpha_{n,n}$. Donc, etc.

SOLUTION DE LA QUESTION 384

(voir t. XVI, p. 182);

PAR M. J-CH. DUPAIN,
Ancien élève de l'École Normale.

La droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre change à chaque instant de longueur et de

direction. Trouver l'équation de la ligne décrite par le milieu M de cette droite.

Soient $2a$, $2b$ les longueurs des aiguilles, et $a < b$. Je prends pour origine le centre du cadran et pour axe des y la ligne de midi. La pointe de la petite aiguille a pour coordonnées

$$2a \sin ht, \quad 2a \cos ht$$

en posant

$$h = \frac{\pi}{21600^s}.$$

La pointe de la grande aiguille a pour coordonnées

$$2b \sin kt, \quad 2b \cos kt$$

en posant

$$k = \frac{\pi}{1800^s}.$$

Les coordonnées du point M sont moyennes arithmétiques entre celles des pointes des aiguilles

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a \sin ht + b \sin kt, \\ y = a \cos ht + b \cos kt. \end{cases}$$

Si l'on voulait les coordonnées polaires du point M, on aurait

$$(\alpha). \qquad \begin{cases} r^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(kt - ht), \\ \tang \theta = \dfrac{a \cos ht + b \cos kt}{a \sin ht + b \sin kt}. \end{cases}$$

L'inspection des équations (1) montre que le point M peut être censé décrire la circonférence d'un cercle dont le centre est mobile sur une autre circonférence; l'une d'elles indifféremment aurait pour rayon a et l'autre b : les deux mouvements sont uniformes et dans le sens de la marche des aiguilles.

Le lieu cherché est donc une épicycloïde que l'on peut

concevoir décrite par le mouvement d'un cercle de rayon $\left(\frac{k-h}{k}\right) b$ ou $\frac{11}{12} b$ roulant sur un cercle fixe de rayon $\frac{h}{k} b$ ou $\frac{b}{12}$ et entraînant avec lui le point M situé à une distance a de son centre.

Il est très-facile de trouver la vitesse absolue du point M. En effet

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

$$v^2 = a^2 h^2 + b^2 k^2 + 2abkh \cos(kt - ht).$$

La vitesse est maximum lorsque les deux aiguilles font un angle nul, et elle est minimum lorsque cet angle est de 180 degrés. (Il en est de même du rayon vecteur.) La vitesse ne pourrait devenir nulle que si $ah = bk$, cas particulier que nous avons exclu en posant

$$a < b.$$

L'aire décrite par le rayon vecteur OM a pour différentielle

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

$$= \frac{1}{2}[-a^2 h - b^2 k - ab(k+h)\cos(kt - ht)]\, dt;$$

elle est d'ailleurs égale à $\frac{1}{2} r^2 d\theta$: on aura donc, pour la vitesse angulaire,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-a^2 h - b^2 k - ab(k+h)\cos(kt - ht)}{a^2 + b^2 + 2ab\cos(kt - ht)}.$$

Examinons si elle peut être nulle. Il faut pour cela que

$$\cos(kt - ht) = -\frac{a^2 h + b^2 k}{ab(k+h)},$$

condition impossible si le second membre est numériquement supérieur à 1, c'est-à-dire si $\frac{k}{h} > \frac{a}{b}$ ou $12 > \frac{a}{b}$; dans ce cas, la vitesse angulaire conserve toujours son signe et l'épicycloïde est allongée. Elle serait raccourcie si 12 égalait $\frac{a}{b}$: et enfin elle serait ordinaire si $12 < \frac{a}{b}$.

L'angle du rayon vecteur et de la tangente a pour tangente trigonométrique

$$\frac{rd\theta}{dr} \quad \text{ou} \quad \frac{r^2 d\theta}{rdr}.$$

Le numérateur de cette fraction est déjà calculé et son dénominateur est la moitié de la dérivée de r^2, c'est-à-dire

$$ab(k-h)\sin(kt-ht).$$

Pour terminer, je vais rapporter la trajectoire à des axes mobiles autour du centre du cadran avec une vitesse angulaire égale et opposée à celle de la petite aiguille. L'angle $x'ox$ sera $-ht$, et, en appliquant les formules ordinaires de transformation,

$$x' = b\sin(kt-ht),$$
$$y' = a + b\cos(kt-ht),$$

d'où

$$x'^2 + (y'-a)^2 = b^2.$$

Dans le mouvement relatif aux axes mobiles, la trajectoire est un cercle ayant pour rayon la moitié de la grande aiguille et pour ordonnée du centre la moitié de la petite aiguille. Le mouvement est d'ailleurs uniforme. La pointe de la petite aiguille est un centre de similitude des cercles décrits par le point M et par la pointe de la grande aiguille, résultats faciles à prévoir.

SOLUTION DE LA QUESTION

énoncée t. XVI, p. 109.

PAR UN ÉLÈVE DU LYCÉE DE CARCASSONNE.

Étant donnés un cercle et deux perpendiculaires à l'extrémité d'un diamètre AB, mener une tangente CD telle, que le volume engendré par le trapèze ainsi formé tournant autour du diamètre AB soit égal à une sphère de rayon donné *a*.

Je prends pour inconnues les segments interceptés sur les deux perpendiculaires par la tangente CD. Je joins le centre O aux points C, D et au point de contact T. Le triangle COD est rectangle et donne

$$\overline{OT}^2 = CT.\overline{TD};$$

or

$$AC = CT, \quad BD = DT,$$

donc

$$R^2 = xy;$$

le trapèze ABDC engendre un tronc de cône dont le volume est

$$\frac{1}{3}\pi(2R)(x^2 + y^2 + xy) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

La seconde équation se simplifie par la suppression des facteurs communs et l'élimination de xy. On peut alors isoler $x^2 + y^2$; puis par l'addition et la soustraction de $2xy$, on obtient

$$(x+y)^2 \quad \text{et} \quad (x-y)^2,$$

enfin

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R} + R^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R} - 3R^2},$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R} + R^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R} - 3R^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que

$$\frac{2a^3}{R} \geqq 3R^2;$$

le minimum de a est donc $R\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

THÉORÈME SUR QUATRE CARRÉS;

Par M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Théorème. Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques d'entre eux diminuée du quatrième fasse un carré. (Euler.)

Lemme. Il est impossible de satisfaire en nombres entiers à l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = z^2.$$

Si l'on pose

$$z = x + y + t,$$

on a

$$x^2 - 2tx + y^2 - t^2 - 2ty = 0,$$

d'où

$$x = t \pm \sqrt{3t^2 - (y - t)^2};$$

il faudra donc poser

$$3t^2-(y-t)^2=k^2.$$

Or l'on ne peut satisfaire à cette équation, puisque la somme de deux carrés ne peut être divisible par 3 et que d'ailleurs k et $y-t$ ne peuvent être à le fois divisibles par 3.

Revenant au théorème d'Euler, je suppose que l'on puisse avoir à la fois les quatre équations

$$(1)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-t^2=a^2, \\ x^2+y^2-z^2+t^2=b^2, \\ x^2-y^2+z^2+t^2=c^2, \\ -x^2+y^2+z^2+t^2=d^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$(2)\quad \begin{cases} 4x^2=a^2+b^2+c^2-d^2, \\ 4y^2=a^2+b^2-c^2+d^2, \\ 4z^2=a^2-b^2+c^2+d^2, \\ 4t^2=-a^2+b^2+c^2+d^2. \end{cases}$$

D'où il résulte que des quatre nombres a, b, c, d deux sont nécessairement pairs s'ils ne sont pas tous impairs On pourra donc poser

$$a+b+c+d=2A,$$
$$a+b-c-d=2B,$$
$$a-b+c-d=2B,$$
$$-a+b+c-d=2B,$$

d'où

$$2a=A+B+C-D,$$
$$2b=A+B-C+D,$$
$$2c=A-B+C+D,$$
$$2d=A-B-C-D$$

Le système (2) devient ainsi

$$16x^2 = (A+B)^2 + (C-D)^2 + (A-B)(C+D),$$
$$16y^2 = (A+B)^2 + (C-D)^2 - (A-B)(C+D),$$
$$16z^2 = (A-B)^2 + (C+D)^2 + (A+B)(C-D),$$
$$16t^2 = (A-B)^2 + (C+D)^2 - (A+B)(C-D).$$

L'une des équations (1), la première par exemple, devient

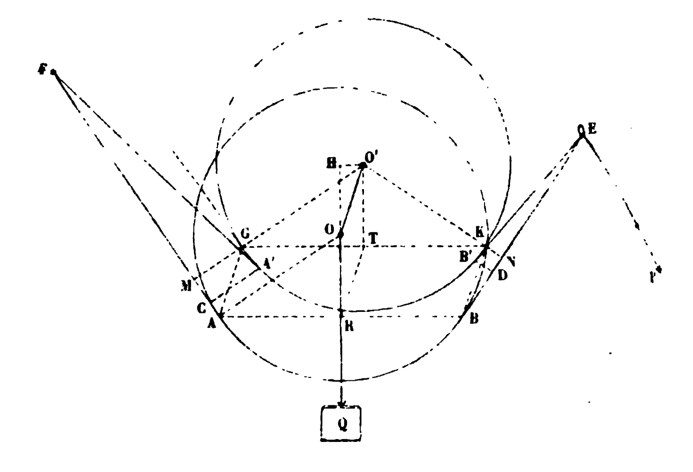
$$2(A+B)^2 + (C-D)^2 + 2(A+B)(C-D) = 16a^4,$$

équation impossible d'après le lemme.

TRAVAIL DANS LA POULIE MOBILE;

Par M. BUCH,
Professeur de mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg.

Soient O la poulie mobile, F le point d'attache du cor-



don; je suppose que ce cordon passe dans un anneau E. C'est suivant ce cordon qu'agit la puissance P. La force Q appliquée en O, et que je supposerai verticale, est la résistance à vaincre. α désignant l'angle des cordons avec la verticale, l'équation d'équilibre est

$$Q = 2P\cos\alpha.$$

Imprimons au système un déplacement virtuel. En vertu de ce déplacement le centre O sera venu en O′, et il sera sorti une certaine longueur de cordon. Désignons OO′ ou le chemin élémentaire parcouru par le centre de la poulie par s et par ω l'angle que fait OO′ avec la verticale.

L'expression du travail élémentaire résistant sera

$$Qs\cos\omega.$$

Cela posé, tâchons d'évaluer la longueur du cordon qui est sortie.

AB est l'arc embrassé par le cordon dans la première position.

A′B′ est l'arc embrassé après le déplacement virtuel. Inscrivons la corde GK égale et parallèle à AB, et des points F et E décrivons des arcs de cercle qui rencontrent FA et EB aux points C et D. (Ces points C et D, en négligeant les infiniment petits du second ordre, ne sont autre chose que les projections des points A et A′.)

Il est évident maintenant que si l'on représente par l la longueur du cordon sorti de l'anneau, on aura

$$l = AC + GA' + BD + B'K.$$

Joignons le point T, milieu de GK, avec R, milieu de AB; joignons aussi AG, BK, GO′, AO: on aura

$$AG = BK = TR = OO',$$

et AO est égal et parallèle à GO′.

La tangente au point G est donc parallèle à FA. Mais cette tangente est dirigée suivant l'arc élémentaire GA' qui, par conséquent, se projette en vraie grandeur suivant MC. De même l'arc élémentaire KB' se projettera en vraie grandeur suivant ND.

Nous aurons dès lors

$$l = \text{AM} + \text{BN}.$$

Il est évident que nous ne négligeons que des infiniment petits du deuxième ordre.

Mais

$$\text{AM} = s$$

est la projection de AG sur FA; donc

$$\text{AM} = s\cos(\alpha + \omega).$$

De même

$$\text{BN} = s\cos(\alpha - \omega);$$

donc

$$\text{AM} + \text{BN} = l = 2s\cos\alpha\cos\omega.$$

Le travail de la puissance est par conséquent

$$\text{P}l = 2\text{P}s.\cos\alpha\cos\omega,$$

et comme le travail de Q est

$$\text{Q}s\cos\omega,$$

on peut écrire

$$\text{TP} = \text{TQ}$$

en vertu de la relation

$$\text{Q} = 2\text{P}\cos\alpha.$$

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 388 (FAURE)

(voir p. 183);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

I. Cette question se rattache directement à la belle théorie des *courbes polaires*, que le lecteur trouvera exposée dans l'ouvrage de M. G. Salmon intitulé : *A Treatise on the higher plane curves*, p. 57 et suivantes. Mais pour montrer ici comment la solution se déduit de cette théorie, il est nécessaire d'en rappeler en peu de mots les propositions principales.

On sait, depuis Cotes (*), que si une transversale tourne autour d'un point fixe dans le plan d'une courbe géométrique, le *centre des moyennes harmoniques* des points de rencontre de la courbe par la transversale, pris relativement au point fixe, décrit une ligne droite.

Ce centre harmonique est donné, pour chaque position de la transversale, par l'équation

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)=0, \tag{1}$$

dans laquelle ρ exprime sa distance au pôle fixe O ; ρ_1 la distance du pôle à l'un des points de rencontre de la transversale et de la courbe, et où le signe Σ indique qu'il faut faire la somme d'autant de termes semblables qu'il y a d'unités dans le degré de la courbe donnée.

La droite que décrit le centre harmonique a reçu le nom de *droite polaire* du *pôle* O par rapport à la courbe.

(*) *Voir* t. IX, p. 205, 285 et 344.

II. Par analogie, si, au lieu de l'équation (1), on prend la suivante

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_2}\right)=0,$$

le point variable dont ρ exprime la distance au pôle fixe O, décrit évidemment une conique qui a reçu le nom de *conique polaire* du point O par rapport à la courbe.

Plus généralement, on appelle *courbe polaire de l'ordre k* d'un point fixe par rapport à une courbe géométrique, celle dont le rayon vecteur ρ, compté à partir de ce point pris pour origine, est donné par l'équation du $k^{ième}$ degré

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_k}\right)=0,$$

dans laquelle chaque terme se compose du produit de k facteurs tels que $\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)$.

III. Un point fixe a donc $m-1$ courbes polaires par rapport à une courbe géométrique du degré m. On désigne par les noms de :

Première polaire celle dont le degré est $m-1$;

Deuxième polaire celle dont le degré est $m-2$;

Et ainsi de suite.

Les trois dernières courbes de cette série descendante sont la *cubique polaire*, la *conique polaire* et la *droite polaire* du point fixe par rapport à la courbe.

IV. Il existe un lien remarquable entre ces différentes courbes : c'est que l'une quelconque d'entre elles est aussi l'une des courbes polaires du point fixe par rapport à toutes celles qui la précèdent dans la hiérarchie. Par exemple, soient X, Y, Z la droite, la conique et la cubique polaire d'un point O par rapport à une courbe du

quatrième ordre U ; la droite X est aussi la polaire du point O, soit par rapport à la cubique Z, soit par rapport à la conique Y, et celle-ci est également la conique polaire du point O par rapport à la cubique Z.

V. On démontre aisément (*voir* Salmon, p. 59) que les points de contact des tangentes, menées par le pôle O à la courbe donnée U, sont situés sur la première polaire de ce point, ce qui prouve incidemment que ces tangentes sont au nombre de $m(m-1)$, puisque la courbe est du degré m et sa première polaire du degré $m-1$.

VI. Si la courbe V a un point multiple de l'ordre p, ce point est multiple de l'ordre $p-1$ sur la première polaire; il est multiple de l'ordre $p-2$ sur la seconde polaire, et ainsi de suite, quel que soit d'ailleurs le pôle de ces diverses polaires.

Si la courbe U n'a que deux points doubles, la première polaire est seule à passer par chacun de ces points, et elle n'y passe qu'une fois.

VII. On démontre encore (Salmon, p. 61) cette autre propriété qui va être utile pour résoudre la question 388, savoir, que la tangente à la première polaire en l'un des points doubles de la courbe U est conjuguée harmonique de la droite qui joint ce point double au pôle, par rapport aux deux tangentes que la courbe U possède en ce point double.

VIII. $U=0$ étant l'équation de la courbe donnée exprimée en *coordonnées trilinéaires* (c'est-à-dire rendue homogène par la substitution des variables $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ aux coordonnées ordinaires x, y), et x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées du pôle O, l'équation de la première polaire Z de ce pôle est

$$Z = x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0. \text{ (Salmon, p. 58.)}$$

priété des courbes du troisième ordre qu'on trouvera énoncée page 245 de ma *Traduction* de Maclaurin.

Mais ces développements particuliers seraient ici superflus.

Nota. Voici la démonstration du théorème important qui est cité au § V.

On prouve d'abord que *la première polaire d'un point fixe* O, *par rapport à une courbe donnée, est aussi le lieu géométrique des points dont les droites polaires passent par le point* O.

En effet l'équation

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1 = 0$$

exprime une relation entre x, y, z, coordonnées d'un point quelconque de la droite polaire, et x_1, y_1, z_1 coordonnées du pôle. Donc si le premier de ces deux points est fixe (x_2, y_2, z_2) et le second variable, le lieu géométrique de ce dernier sera représenté par l'équation

$$x_2\left(\frac{dU}{dx}\right) + y_2\left(\frac{dU}{dy}\right) + z_2\left(\frac{dU}{dz}\right) = 0,$$

qui est précisément l'équation de la première polaire du point (x_2, y_2, z_2) par rapport à la courbe.

Ce théorème peut encore se démontrer comme il suit : Soient O le point fixe et O' un point quelconque de la première polaire du point O; a, b, c,..., m étant les points de rencontre de la transversale OO' et de la courbe, on a par hypothèse l'équation

$$\sum\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right)\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob}\right)\cdots\left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Om}\right) = 0.$$

et il suffit de montrer qu'on a en même temps

$$\sum\left(\frac{1}{O'O} - \frac{1}{O'a}\right) = 0.$$

Or cette seconde équation est toujours une conséquence de la première, comme il est facile de le voir, au moyen d'une simple vérification, en écrivant

$$O'a = OO' - Oa, \quad O'b = OO' - Ob,$$

et ainsi de suite.

On démontre, en second lieu, *que la droite polaire d'un point simple d'une courbe est la tangente à la courbe en ce point.*

Cette proposition, qui résulte très-simplement de quelques théorèmes qu'il serait trop long de rappeler ici et qu'on trouvera dans l'ouvrage de Salmon, peut se démontrer ainsi qu'il suit.

Soit O' un point quelconque de la droite polaire d'un pôle donné O. On a l'équation

$$\sum \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa}\right) = 0$$

ou

$$\sum \left(\frac{O'a}{OO'.Oa}\right) = 0.$$

En développant, il vient celle-ci

$$O'a.Ob.Oc.Od\ldots Om + O'b.Oa.Oc.Od\ldots Om$$
$$+ O'c.Oa.Ob.Od\ldots Om + \ldots = 0,$$

dans laquelle tous les termes, à l'exception du premier, contiennent le facteur Oa. Donc si le point O est pris en a sur la courbe, Oa est nul et l'équation se réduit à son premier terme

(1) $$O'O.Ob.Oc\ldots Om = 0.$$

Or le point a n'étant pas un point multiple de la courbe donnée, les lignes Ob, Oc,..., Om ne sont pas nulles en

général; donc on a simplement

$$OO' = 0,$$

ce qui signifie que, pour toutes les directions de la transversale OO', la droite polaire du point O de la courbe passe par ce point lui-même. Mais si l'on prend pour cette transversale la tangente même de la courbe, Ob est nul et l'équation (1) est satisfaite d'elle-même, quelle que soit la valeur de OO', ce qui signifie que tous les points de la transversale, actuellement tangente à la courbe, appartiennent à la droite polaire du point de contact, ou, en d'autres termes, que cette tangente est la droite polaire elle-même. C. Q. F. D.

De ce théorème et du précédent on conclut immédiatement que *les points de contact des tangentes issues d'un point donné sont sur la première courbe polaire de ce plan*. C'est précisément ce qu'il fallait prouver.

COSMOGRAPHIE.

SOLUTION DE LA QUESTION 331

(voir t. XV, p. 248);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

Question. Soient les jours relatifs au soleil vrai, au soleil fictif dans l'écliptique et au soleil fictif dans l'équateur. Quand ces jours considérés deux à deux sont-ils égaux? Quand les trois jours sont-ils égaux?

Soient E le nombre de secondes de temps qu'il faut ajouter à l'heure vraie pour avoir l'heure moyenne, c'est-à-dire l'*équation du temps*, $\odot$ la longitude *vraie* du so-

leil et α la longitude de l'apogée ; on a

$$(1) \quad \begin{cases} E = -462^s \sin(\odot - \alpha) - 593^s \sin 2\odot \\ \quad - 3^s \sin 2(\odot - \alpha) + 13^s \sin 4\odot. \end{cases}$$

Cette formule a été donnée par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1772 et convient encore à l'époque actuelle, malgré les petites variations qu'ont éprouvées l'inclinaison et l'excentricité de l'orbite terrestre (*)

Pour plus de simplicité, je négligerai les deux derniers termes qui sont très-faibles : l'erreur est insensible. Par exemple, pour le 28 janvier 1857 où l'on a

$$\odot = 308^\circ 34' 57'',$$

la formule, réduite à ses deux premiers termes, donne

$$E = 13^m 15^s,8$$

au lieu de

$$13^m 17^s,9$$

que donne la *Connaissance des Temps*.

Quand le jour vrai est égal en durée au jour moyen, la variation de l'équation du temps est évidemment nulle, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{dE}{d\odot} = 0$$

ou

$$231 \cos(\odot - \alpha) + 593 \cos 2\odot = 0.$$

Développant $\cos(\odot - \alpha)$ et $\cos 2\odot$, puis ayant égard à la valeur de α pour 1857, savoir

$$\alpha = 100^\circ 27' 51'',$$

(*) A démontrer prochainement.

on trouve, par des calculs faciles,

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = \cos^4 \odot - 0{,}070749.\cos^3 \odot - 0{,}962064 \cos^2 \odot \\ \qquad + 0{,}035374 . \cos \odot + 0{,}213315. \end{cases}$$

Traitant cette équation complète du quatrième degré par la méthode ordinaire, on trouve pour équation transformée, c'est-à-dire privée du second terme,

$$y^4 = 0{,}963941\, y^2 + 0{,}001298\, y + 0{,}213639 = 0$$

dont les quatre racines sont réelles et donnent pour celles de l'équation (2) les quatre valeurs

$$\begin{aligned} &+ 0{,}804979, \\ &+ 0{,}604585, \\ &- 0{,}570884, \\ &- 0{,}767932 \end{aligned}$$

dont la somme est 0,070748, exacte à 0,000001 près, et dont le produit est 0,21336 à 4 cent-millièmes près.

Ces nombres sont les cosinus des longitudes ci-après, respectivement

323° 36′ 30″	qui correspondent en nombres ronds aux	11 février.
52.48. 3		13 mai.
124.48 43		27 juillet.
219.49.53		2 novembre.

Tels sont donc les quatre jours de l'année où il y a actuellement égalité entre les jours vrais et moyens. Il s'agit de faire la même chose pour le jour moyen et le jour fictif.

Le soleil fictif S′ et le soleil moyen S″ ayant un mouvement égal, le premier sur l'écliptique, le second sur l'équateur, et passant ensemble au point vernal, l'ascension droite de S″ égale toujours la distance de S′ à l'équinoxe que je désignerai par $\odot'$. On a donc, en désignant

par $\odot''$ l'ascension droite de S',

$$\operatorname{tang}\odot' = \frac{\operatorname{tang}\odot''}{\cos\omega};$$

ω obliquité de l'écliptique $= 23^\circ\ 27'\ 29'',6$. D'où l'on tire

$$\operatorname{tang}(\odot' - \odot'') = \frac{(1-\cos\omega)}{\cos\omega} \cdot \frac{\operatorname{tang}\odot''}{1+\frac{\operatorname{tang}^2\odot''}{\cos\omega}}.$$

Quand le jour moyen est égal au jour fictif, on a évidemment

$$\frac{d(\odot' - \odot'')}{d\odot''} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}\odot'' = \pm\sqrt{\cos\omega} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\odot' = \pm\frac{\sqrt{\cos\omega}}{\cos\omega}.$$

Donc il y a égalité des jours moyen et fictif quand la longitude *moyenne* du soleil a les quatre valeurs suivantes

46° 14′ 7″, 133° 45′ 53″. 226° 14′ 7″ 313° 45′ 53″,

qui, en ayant égard à l'équation du centre, correspondent aux longitudes *vraies*

47° 46′ 42, 132° 43′ 34″, 224° 39′ 11″, 314° 50′ 20″,

lesquelles ont lieu vers le

8 mai, 5 août, 6 novembre, 3 février

Si l'on compare ces dates aux précédentes, on voit qu'il n'y a rigoureusement aucun jour dans l'année où les trois jours soient égaux entre eux, mais qu'ils approchent beaucoup de l'égalité le 10 mai et le 4 novembre, et qu'ils diffèrent peu les uns des autres vers le 7 février et le 1er août. C'est ce qu'il s'agissait de trouver.

La suite prochainement.

FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON
(Fin d'un premier article)

(voir page 317).

On peut de la formule d'interpolation de Lagrange déduire celle de Newton, en supposant que les nombres x_0, $x_1, \ldots, x_{m-1}$, x_m soient les termes de la progression arithmétique x_0, $x_0 + h, \ldots,$ $x_0 (m - 1) h$, $x_0 + mh$.

Reprenons la première de ces formules qui est

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{m-1})(x - x_m)} u_0 \\
&+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_{m-1})(x_1 - x_m)} u_1 + \ldots \\
&+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{p-1})(x - x_{p+1})\ldots(x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_p - x_0)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1})(x_p - x_{p+1})\ldots(x_p - x_{m-1})(x_p - x_m)} u_p \\
&+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-2})(x - x_m)}{(x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1)\ldots(x_{m-1} - x_{m-2})(x_{m-1} - x_m)} u_{m-1} \\
&+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-2})(x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1)\ldots(x_m - x_{m-2})(x_m - x_{m-1})} u_m.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par $x_0 + h$, $x_0 + 2h, \ldots,$ $x_0 + mh$, le dernier terme de cette formule devient

$$\frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)\ldots[x - x_0 - (m - 2)h][x - x_0 - (m - 1)h]}{mh.(m - 1)h\ldots 2h.h} u_m$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\left(\dfrac{x - x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x - x_0}{h} - 1\right)\cdots\left[\dfrac{x - x_0}{h} - (m - 2)\right]\left[\dfrac{x - x_0}{h} - (m - 1)\right]}{m.(m - 1)\ldots 2.1} u_m.$$

L'avant-dernier terme prendra la forme

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(m-2h](x-x_0-mh)}{(m-1)h.(m-2)h\ldots h\times(-h)}u_{m-1},$$

et pourra s'écrire ainsi

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{(m-1)(m-2)\ldots 1.1}u_{m-1},$$

et, afin que le dénominateur soit encore le produit $m(m-1)\ldots 3.2.1$, on multipliera par m les deux termes de l'expression précédente, ce qui donnera

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots 3.2.1}.mu_{m-1}.$$

On trouvera de même que les termes précédant l'avant-dernier de la formule (3) deviennent respectivement

$$+\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots 3.2.1}$$

$$\times\frac{m(m-1)}{1.2}u_{m-2},$$

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots 3.2.1}$$

$$\times\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}u_{m-3},$$

. . . .

Considérons généralement le terme

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\ldots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\ldots(x_p-x_{m-1})(x_p-x_m)}u_p.$$

dans lequel le nombre p est supposé moindre que m. En remplaçant dans ce terme x_1, $x_2,\ldots$, x_{p-1}, x_p, $x_{p+1},\ldots$, x_{m-1}, x_m par x_0+h, $x_0+2h,\ldots$, $[x_0+(p-1)h]$, (x_0+ph), $[x_0+(p+1)h],\ldots$, $[x_0+(m-1)h]$, (x_0+mh), on a d'abord

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(p-1)h][x-x_0-(p+1)h]\ldots[x-x_0-(m-1)h](x-x_0-mh)}{ph.(p-1)h\ldots h.(-h)\times-[(m-1)-p]h\times-(m-p)h}$$

Puis

$$\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{p.(p-1)\ldots1.(-1)\ldots\times-[(m-1)-p]\times-(m-p)}$$

ou bien encore

$$\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{p.(p-1)\ldots1\times1\ldots[(m-1)-p](m-p)}$$

et enfin

$$\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m.(m-1)\ldots3.2.1}$$

$$\times\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}u_p.$$

Il faut mettre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que $m-p$ est pair ou impair.

Ainsi, lorsque les valeurs substituées à la variable x sont x_0, x_0+h, $x_0+2h,\ldots$, $x_0+(m-1)h$, x_0+mh, on peut donner à la formule d'interpolation de Lagrange

la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{m(m-1)\ldots3.2.1}u_m \\
&-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}mu_{m-1}+\ldots \\
&\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1} \\
&\times\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}u_p+\ldots \\
&\mp\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}mu_1 \\
&\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}u_0.
\end{aligned}\right.$$

Pour en déduire la formule d'interpolation de Newton, il faut remplacer u_m, u_{m-1}, $u_{m-2}, \ldots$, u_1 par les développements

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&u_0+m\Delta u_0+\frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2u_0+\ldots+\Delta^m u_0, \\
&u_0+(m-1)\Delta u_0+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\Delta^2u_0+\ldots+\Delta^{m-1}u_0, \\
&u_0+(m-2)\Delta u_0+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\Delta^2u_0+\ldots+\Delta^{m-2}u_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_0+\Delta u_0.
\end{aligned}\right.$$

Afin d'abréger l'écriture, posons $z=\frac{x-x_0}{h}-m$. Il en

résultera

$$z+1=\frac{x-x_0}{h}-(m-1),$$

$$z+2=\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\ldots,$$

$$z+m=\frac{x-x_0}{h}.$$

Et en représentant par $f(z)$ le produit des $(m+1)$ facteurs consécutifs z, $(z+1)$, $(z+2)$,..., $(z+m)$, la formule (4) se transformera en celle-ci

$$(6)\ \frac{1}{m(m-1)\ldots 3.2.1}\left\{\begin{array}{l}\frac{f(z)}{z}u_m-\frac{f(z)}{z+1}\cdot mu_{m-1}+\frac{f(z)}{z+2}\cdot\frac{m(m-1)}{1.2}u_{m-2}-\ldots\\ \pm\frac{f(z)}{z+m-p}\ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}u_p\mp\ldots\\ \mp\frac{f(z)}{z+m-1}\cdot mu_1\pm\frac{f(z)}{z+m}u_0.\end{array}\right.$$

Si l'on remplace dans la formule (6) u_m, u_{m-1}, u_{m-2},..., u_1 par les développements (5), le résultat de la substitution sera évidemment une expression de la forme

$$a_0u_0+a_1\Delta u_0+a_2\Delta^2u_0+\ldots+a_p\Delta^p u_0+\ldots+a_m\Delta^m u_0,$$

et on aura d'abord

$$a_0=\frac{1}{m(m-1)\ldots 2.1}\left[\begin{array}{c}\frac{f(z)}{z}-m\frac{f(z)}{z+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{f(z)}{z+1}+\ldots\\ \mp m\frac{f(z)}{z+m-1}\pm\frac{f(z)}{z+m}\end{array}\right].$$

Mais on a vu (page 317) que

$$1.2.3\ m=\frac{f(z)}{z}-m\cdot\frac{f(z)}{z+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\ \frac{f(z)}{z+2}-\ldots$$
$$\mp m\frac{f(z)}{z+m-1}\pm\frac{f(z)}{z+m};$$

donc

$$a_0 = 1.$$

Il viendra ensuite

$$a_1 = \frac{1}{m(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times\left[\begin{array}{c} m\frac{f(z)}{z} - m(m-1)\frac{f(z)}{z+1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{f(z)}{z+2} - \ldots \\ \mp m\frac{f(z)}{z+m-1} \end{array}\right],$$

d'où

$$a_1 = \frac{1}{(m-1)\ldots 2.3}$$

$$\times\left[\begin{array}{c} \frac{f(z)}{z} - (m-1)\frac{f(z)}{z+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{f(z)}{z+2} - \ldots \\ \mp \frac{f(z)}{z+m-1} \end{array}\right],$$

ou bien, en représentant par $\varphi(z)$ le produit des m facteurs consécutifs z, $z+1, \ldots, z+m-1$, et en ayant égard à ce que

$$f(z) = \varphi(z) \times (z+m),$$

on aura

$$a_1 = \frac{z+m}{(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times\left[\begin{array}{c} \frac{\varphi(z)}{z} - (m-1)\frac{\varphi(z)}{z+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{\varphi(z)}{z+2} - \ldots \\ \mp \frac{\varphi(z)}{z+m-1} \end{array}\right].$$

Or (page 317)

$$1.2\ldots(m-1) = \frac{\varphi(z)}{z} - (m-1)\frac{\varphi(z)}{z+1}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{\varphi(z)}{z+1} + \ldots \mp \frac{\varphi(z)}{z+m-1},$$

donc

$$a_1 = z + m = \frac{x - x_0}{h}.$$

Le coefficient a_p du terme général $a_p \Delta^p u_0$ sera déterminé par l'égalité

$$a_p = \frac{1}{m(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\dfrac{f(z)}{z} \\ - m.\dfrac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-p)}{1.2.3\ldots p}\dfrac{f(z)}{z+1} \\ + \dfrac{m(m-1}{1.2}.\dfrac{(m-2)(m-3)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots p}\dfrac{f(z)}{z+2} - \ldots \\ \pm \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}\dfrac{f(z)}{z+m-p} \end{array} \right\},$$

d'où, en réduisant,

$$a_p = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-p)}$$

$$\times \left[\frac{\dfrac{f(z)}{z} - (m-p)\dfrac{f(z)}{z+1} + (m-p)(m-p-1)\dfrac{f(z)}{z+2} - \ldots \pm \dfrac{f(z)}{z+m-p}}{1.2.3\ldots(p-1)p} \right].$$

Cela posé, nommons $\varphi(z)$ le produit des $(m-p+1)$ facteurs consécutifs z, $z+1$, $z+2,\ldots$, $(z+m-p)$, il en résultera

$$f(z) = \varphi(z) \times (z+m-p+1)(z+m-p+2)\ldots(z+m),$$

et par suite

$$a_p = \frac{(z+m)\ldots(z+m-p+1)}{1.2.3\ldots(m-p)}$$

$$\times \left[\frac{\dfrac{\varphi(z)}{z} - (m-p)\dfrac{\varphi(z)}{z+1} + \dfrac{(m-p)(m-p-1)}{1.2}\dfrac{\varphi(z)}{z+2} - \ldots \pm \dfrac{\varphi(z)}{z+m-p}}{1.2.3\ldots(p-1)p} \right].$$

Mais

$$1.2.3\ldots(m-p) = \frac{\varphi(z)}{z} - (m-p)\frac{\varphi(z)}{z+1} + \frac{(m-p)(m-p-1)}{1.2} - \ldots + \frac{\varphi(z)}{z+m-p}:$$

donc

$$a_p = \frac{(z+m)(z+m-1)\ldots[(z+m-(p-1)]}{1.2\ldots p},$$

et, parce que

$$z+m = \frac{x-x_0}{h},$$

on aura

$$a_p = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]}{1.2\ldots p}.$$

En remplaçant successivement p par les nombres 1, 2, 3,..., m, cette dernière égalité donne

$$a_1 = \frac{x-x_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2},$$

$$a_3 = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)}{1.2.3},\ldots,$$

$$a_m = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{1.2.3\ldots m}.$$

D'ailleurs

$$a_0 = 1,$$

par conséquent l'expression

$$a_0 u_0 + a_1 \Delta u_0 + a_2 \Delta^2 u_0 + \ldots + a_m \Delta^m u_0$$

revient à

$$u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1\ 2} + \ldots$$

$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right)\ldots$$

$$\times \left[\frac{x - x_0}{h} - (m - 1)\right]\frac{\Delta^m u_0}{1.2.3\ldots m}.$$

Ce qui est la formule d'interpolation de Newton.

G.

SUR UNE QUESTION D'ALGÈBRE RELATIVE A DEUX ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ

(voir t. XV, p. 76);

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Étant données deux équations biquadratiques, savoir

(I) $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$ (racines α, β, γ, δ),

(II) $a'x^4 + 4b'x^3 + 6c'x^2 + 4d'x + e' = 0$ (racines $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$),

je vais présenter dans ce qui suit les éléments de la formation de l'équation ayant pour racines les valeurs que prend la fonction

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'.$$

Il est facile de voir que cette fonction a vingt-quatre valeurs, et l'équation dont il s'agit est assez compliquée: mais en faisant usage des solutions algébriques des équations données, j'ai réussi à la mettre sous une forme simple, qui se prête facilement aux divers résultats. Je dois mentionner surtout que j'ai été ainsi conduit par une

marche très-simple à l'équation au carré des différences des racines de l'équation (I) : résultat que je ne me souviens d'avoir rencontré dans aucun traité d'algèbre.

Posons d'abord

$$a^2\varpi = b^2 - ac,$$
$$12a^2\mu = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$8a^3\lambda = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$
$$l = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^3}, \quad m = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

et désignons par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues pour l'équation (II).

Faisons maintenant

$$z = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'$$

et introduisons la quantité auxiliaire u donnée par l'équation

$$u = \frac{1}{4}\left(z - \frac{4bb'}{aa'}\right)$$

et posons

$$u^4 - 6\varpi\varpi' u^2 - 2u\,\frac{(a^2d - 3abc + 2b^3)(a'^2d' - 3a'b'c' + 2b'^3)}{a^3a'^3}$$
$$- 3(3\varpi^2\varpi'^2 - 4\varpi^2\mu' - 4\omega'^2\mu - 2\mu\mu') = \mathrm{P},$$
$$6u^2 - 3\left(2\varpi\varpi' - \frac{l'm}{\mu\mu'} + \frac{4\varpi l'}{\mu'} + \frac{4\varpi' m}{\mu}\right) = \mathrm{Q},$$
$$6u^2 - 3\left(2\varpi\varpi' - \frac{lm'}{\mu\mu'} + \frac{4\varpi m'}{\mu'} + \frac{4\omega' l}{\mu}\right) = \mathrm{R},$$

et l'équation cherchée s'écrit de la manière suivante

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q}(lm')^{\frac{1}{3}} + \mathrm{R}(l'm)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui donne

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{P}^3 = \mathrm{Q}^3 lm' + \mathrm{R}^3 l'm + 3\mu\mu'\,\mathrm{PQR}.$$

Or cette équation monte au douzième degré et ne contient que la seule expression irrationnelle

$$\sqrt{(\lambda^2-\mu^3)(\lambda'^2-\mu'^3)},$$

d'où, en élevant au carré, nous passons à l'équation cherchée

Pour trouver l'équation au carré des différences des racines de l'équation (I), il suffit de poser dans l'équation (II)

$$a'=6,\quad b'=0,\quad c'=-1,\quad d'=0,\quad e'=0\ (*),$$

et, en substituant ces valeurs, nous trouvons

$$P=u^4+\varpi u^2+\frac{3}{8}\mu,\quad Q=6u^2+\frac{q}{4}\frac{m}{\mu},\quad R=6u^2+\frac{q}{4}\frac{l}{\mu},$$

et l'équation (III) donne (en posant $2u^2=\theta$)

$$\left(\theta^2+2\varpi\theta+\frac{3}{2}\mu\right)^3=\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)^3 l+\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)^3 m$$
$$+3\mu\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)\left(\theta^2+2\varpi\theta+\frac{3}{2}\mu\right)$$

ou bien

$$\left(\theta^2+2\varpi\theta+\frac{3}{2}\mu\right)^3=\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)^3 l+\left(\theta+\frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)^2 m$$
$$+3\left(\theta^2+2\varpi\theta+\frac{3}{2}\mu\right)\left(\mu\theta^2-\frac{3}{2}\lambda\theta+\frac{9}{16}\mu^2\right),$$

et, en posant

$$t=-8\theta,$$

les quantités

$$(\alpha-\beta)^2,\quad (\alpha-\gamma)^2,\quad (\alpha-\delta)^2,$$
$$(\beta-\gamma)^2,\quad (\beta-\delta)^2,\quad (\gamma-\delta)^2$$

(*) z^2 devient alors $6(\alpha-\alpha')^2$. Tr.

seront les racines de l'équation suivante en t :

$$t^6 - 4\delta\varpi t^5 + 96t^4(\mu + \delta\varpi^2) - 256t^3(16\varpi^3 + 24\mu\varpi + 13\lambda)$$
$$+ (4\delta)^2 t^2(32\varpi^2\mu + 16\varpi\lambda - 7\mu^2) - (24)^4 t(\mu^2\varpi + \mu\lambda)$$
$$+ 108.8^4(\mu^3 - \lambda^2) = 0.$$

Si les équations données sont identiques, l'équation (III) appartient à deux équations distinctes.

On peut remarquer la relation suivante, qu'on peut démontrer directement :

$$4a^6(\varpi^3 - 2\lambda - 3\varpi\mu) = (a^2 d - 3abc + 2b^3)^2.$$

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 389 (LAGRANGE) ET PREMIÈRE DE LA QUESTION 290

(voir page 296);

PAR M. LE DOCTEUR SACCHI,
De l'université de Pavie.

Si l'on représente par $A_x^{(r)}$ le coefficient de k^x dans le développement de $(1+k)^r$, on aura

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (1+k)^r &= A_0^{(r)} + A_1^{(r)} k + \ldots \\ &\quad + A_{x-1}^{(r)} k^{x-1} + A_x^{(r)} k^x + \ldots + A_r^{(r)} k^r; \end{aligned} \right.$$

si l'on multiplie chaque membre de cette équation par $1+k$, et si l'on observe que le coefficient $_x^{(r+1)}$ est égal à $A_{x-1}^{(r)} + A_x^{(r)}$, on voit facilement que

$$A_x^{(r+n)} = \sum_{y=0}^{y=n} A_{x-y}^{(r)} A_y^{(n)},$$

pourvu que l'on fasse toujours

$$A_0 = 1, \quad A_{-p}^{(m)} = 0, \quad A_{m+p}^{(m)} = 0.$$

Posons

$$x = n = r,$$

et en observant que

$$A_{x-y}^{(r)} = A_y^{(r)},$$

on obtient

$$(2) \qquad A_r^{(2r)} = \sum_{y=0}^{y=r} A_y^{2(r)},$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des coefficients de la puissance r du binôme est égale au coefficient moyen de la puissance $2r$ du même.

Il est à remarquer que la quantité $A_r^{(2r)}$ multipliée par $\frac{n}{4^r}$, ou bien par na^r, donne, dans le premier cas, la somme

$$\cos^{2r}\alpha + \cos^{2r}\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right) + \cos^{2r}\left(\alpha - 2\frac{\pi}{n}\right) + \ldots$$
$$+ \cos^{2r}\left[\alpha - (n-1)\frac{\pi}{n}\right],$$

quels que soient α et n, r entiers positifs; et dans le deuxième cas, la somme des puissances r des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence de rayon $2a$ sur les côtés du polygone régulier circonscrit.

En carrant l'équation connue

$$\sum A_y^{(r)} = 2^r,$$

et en désignant pas S la somme des produits deux à deux

des coefficients A_0, A_1,..., on a

$$\sum A_r^2 + 2S = 4^r;$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}(4^r - A_r^{(2r)}),$$

laquelle fournit la solution de la question 290, proposée dans ce journal, page 192, tome XIII.

On peut arriver plus simplement à l'équation (2) de la manière suivante : que l'on multiplie l'équation (1) avec celle que l'on obtient en plaçant dans la même équation $\frac{1}{k}$ au lieu de k, et l'on aura

$$\frac{(1+k)^{2r}}{k^r} = \sum A_r^{2(r)} + P,$$

où P est un polynôme contenant k dans tous les termes; par conséquent, la somme cherchée sera ce terme du premier membre où k n'entre pas, ou bien sera le coefficient de k^r dans le développement de $(1+k)^{2r}$, c'est-à-dire sera $A_r^{(2r)}$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

SOLUTION DE LA QUESTION 372

(voir p. 178);

PAR M. LOUIS BOYER,
Lieutenant d'artillerie.

Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gra-

vité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le degré de l'enveloppe de la droite qui joint ces trois points.

Soient O le centre de la conique pris pour origine des coordonnées et ayant deux foyers F et F', M le sommet d'un des triangles, α et β ses coordonnées.

Le premier lieu géométrique est l'axe des y, le centre du cercle circonscrit étant toujours sur cet axe.

Le second lieu est le lieu des points

$$y = \frac{\beta}{3}, \quad x = \frac{\alpha}{3},$$

donc l'équation de ce lieu est

$$9Ay^2 + 9Bx^2 = C,$$
$$Ay^2 + Bx^2 = C$$

étant l'équation de la conique : c'est donc une conique semblable à la première, ces deux coniques ayant pour centre de similitude l'origine des coordonnées.

Le point de rencontre des hauteurs est donné par les équations des droites MP perpendiculaire à FF' et F'K perpendiculaire à MF. Ces équations sont

$$x = \alpha, \quad y = -\frac{\alpha - c}{\beta}(x + c),$$

d'où

$$x = \alpha, \quad y = \frac{c^2 - \alpha^2}{\beta}.$$

L'équation du lieu sera donc

$$y^2 = \frac{A(c^2 - x^2)^2}{C - Bx^2}$$

1°. *Ellipse.*

$$y^2 = \frac{a^2(c^2 - x^2)^2}{b^2(a^2 - x^2)},$$

équation de deux courbes symétriques ayant leurs som-

mets sur l'axe des y aux points $y = \pm \frac{c^2}{b}$, passant toutes deux par les foyers et ayant toutes deux pour asymptotes les droites $x = \pm a$.

2°. *Hyperbole.*

$$y^2 = \frac{a^2 (c^2 - x^2)^2}{b^2 (x^2 - a^2)},$$

équation représentant un système de deux lignes hyperboliques ayant chacune une branche imaginaire et pour équations

$$y = \pm \frac{a (c^2 - x^2)}{b \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

La première ligne hyperbolique

$$y = + \frac{a (c^2 - x^2)}{b \sqrt{x^2 - a^2}}$$

a pour asymptotes les droites

$$x = a, \quad y = - \frac{a}{b} x$$

(perpendiculaire à l'une des asymptotes de l'hyperbole donnée), passe par le foyer F, et se trouve alors située au-dessous de l'axe des x, pour les valeurs de x comprises entre a et c, y est positif. L'autre branche est imaginaire.

La deuxième ligne hyperbolique a pour asymptotes les droites

$$x = - a, \quad y = \frac{a}{b} x,$$

passe par le foyer F″, se trouve au-dessous de l'axe des x pour les valeurs de x comprises entre $- a$ et $- c$, et au-dessus pour toutes les autres valeurs. L'autre branche est imaginaire.

Recherche de l'enveloppe. Elle est représentée par les trois équations suivantes, l'équation de la droite, la dérivée de cette équation et l'équation de relation entre α et β; ces équations simplifiées prennent la forme suivante:

$$(1) \qquad [2\alpha y + (x-\alpha)\beta] = (\alpha^2 - c^2)(\alpha - 3x),$$

$$(2) \qquad \begin{cases} 2y(A\beta^2 - B\alpha^2) + 2x\alpha\beta(3A - B) \\ = [A\beta^2 + (3A - 2B)\alpha^2 - Ac^2]\beta, \end{cases}$$

$$(3) \qquad C - B\alpha^2 = A\beta^2.$$

Multipliant (1) et (3) membre à membre, on obtient

$$(4) \qquad \beta = \frac{(C - B\alpha^2)\, 2y\alpha}{A(\alpha^2 - c^2)(\alpha - 3x) - (C - B\alpha^2)(x - \alpha)}.$$

Remplaçant $A\beta^2$ par sa valeur dans l'équation (2), on a aussi

$$(5) \qquad \beta = \frac{2y(C - 2B\alpha^2)}{3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2}.$$

En égalant les valeurs (4) et (5) de β et remplaçant β par sa valeur (4) dans l'équation (3), on a les deux équations suivantes entre α, x, y:

$$(6) \qquad \begin{cases} B(A - B)\alpha^5 + [ABc^2 - (2A - B)C]\alpha^3 \\ -[6ABc^2 - C(3A + B)]x\alpha^2 + C(3Ac^2 - C)x = 0, \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} 4Ay^2(C - 2B\alpha^2)^2 \\ = (C - B\alpha^2)[3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2]^2. \end{cases}$$

D'où l'on déduit les deux équations

$$(8) \qquad x = \frac{P\alpha^5 + Q\alpha^3}{R\alpha^2 - S},$$

$$(9) \qquad y^2 = \frac{(C - B\alpha^2)[3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2]^2}{4A(C - 2B\alpha^2)^2}.$$

Chaque valeur de α donnera une valeur pour x et deux valeurs égales et de signe contraire pour y; la courbe est

donc de degré pair et symétrique relativement à l'axe des x. De plus, pour que x ait une valeur déterminée, α nous sera donné par une équation du cinquième degré, aura donc cinq valeurs : de sorte que pour une valeur de x, y pourra donc avoir dix valeurs différentes. Mais si l'on remplace x par sa valeur (8) dans l'équation (9), on verra qu'une valeur positive ou négative de y pourra être donnée par quatorze valeurs de α, car alors l'équation (9) sera du quatorzième degré en α. Donc pour quatorze valeurs de α, et de x par conséquent, y pourra avoir deux valeurs égales et de signe contraire, ce qui peut faire vingt-huit valeurs différentes : l'équation de l'enveloppe peut donc être considérée comme étant du vingt-huitième degré.

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 389

(voir p. 369);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

Soient m, n, p, q, r des nombres entiers positifs non nuls; si, $[m]$ représentant le produit des nombres entiers différents qui ne dépassent pas m, on convient de remplacer le symbole $[o]$ par 1 et $\frac{1}{[-m]}$ par zéro, on a

$$(1)\qquad \frac{d^n(x^m)}{dx^n} = \frac{[m]}{[m-n]}.x^{m-n};$$

i et o étant fonctions de x, on a

$$(2)\qquad \frac{d^p(uv)}{dx^p} = \sum_{i=0}^{i=p} \frac{[p]}{[i][p-i]}\,\frac{d^i v}{dx^i}.\frac{d^{p-i}u}{dx^{p-i}}.$$

Posons

$$u = x^q, \quad v = x^r;$$

l'égalité (2), en divisant les membres par x^{q+r-p}, devient

$$\frac{[q+r]}{[q+r-p]} = \sum_{i=0}^{i=p} \frac{[p]}{[i][p-i]} \cdot \frac{[r]}{[r-i]} \cdot \frac{[q]}{[q-p+r]},$$

ou bien

$$\frac{[q+r]}{[q+r-p][p]} = \sum_{i=0}^{i=p} \frac{[r]}{[i][r-i]} \cdot \frac{[q]}{[p-i][q-p+i]},$$

en supposant égaux les nombres p, q, r

$$\frac{[2p]}{[p][p]} = \sum_{i=0}^{i=p} \left(\frac{[p]}{[i][p-i]}\right).$$

C. Q. F. D.

COMPOSITIONS POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1857.

Solution d'une équation transcendante;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur à Carcassonne.

$$x = A \sin x + B.$$

Cette équation a pour racines les abscisses des intersections de la ligne droite

(1) $$Ay = x - B$$

et de la sinusoïde

(2) $$y = \sin x.$$

On dessinera une fois pour toutes la ligne (2) qui est bien connue, et quand les coefficients A, B seront donnés.

on tracera la droite (1); les intersections sont en général nettement indiquées, et si elles ne l'étaient pas pour deux points voisins, on construirait sur une échelle plus grande l'arc de courbe qui contient ces points. Ayant ainsi obtenu une première valeur de chaque racine, on appliquera les méthodes connues d'approximation.

Discussion. Nous laissons de côté le cas tout exceptionnel où $A=\infty$, $B=\infty$, $\frac{A}{B}=-\alpha$; l'équation se réduit alors à

$$\sin x-\alpha=0.$$

En appelant x' le plus petit arc positif dont le sinus est α, les solutions en nombre infini sont comprises dans les formules

$$2k\pi+x',\quad (2k+1)\pi-x'.$$

Nous laissons encore de coté l'hypothèse $A=0$ que donnerait $x=B$.

Si A était négatif, nous poserions

$$A=-A',\quad B=B'+\pi,\quad x=x'+\pi;$$

l'équation proposée devient

$$x=A'\sin x'+B',$$

de sorte que nous n'avons à considérer que des valeurs finies et positives de A.

Premier cas. $A<1$. Le coefficient angulaire de la droite (1) est plus grand que 1; il n'y a qu'une racine.

Je pose

$$B=k\pi+\alpha;$$

k étant un nombre entier positif ou négatif, α étant compris entre 0 et π, et

$$F(x)=x-A\sin x-B.$$

En substituant $k\pi$ et $(k+1)\pi$ dans $F(x)$, on trouve des résultats de signes contraires; l'unique racine est

donc comprise ainsi que B entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$. B sera une première valeur approchée. On appliquera ensuite la méthode de Newton ou celle des approximations successives qui réussit ici :

$$x_1 = A \sin B + B,$$
$$x_2 = A \sin x_1 + B,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on porte la valeur de x_1 dans x_2, on trouve

$$x_2 = A \sin (A \sin B + B) + B.$$

On développe le sinus et on introduit sin (A sinB) et cos (A sin B) que l'on remplace par les premiers termes de leur valeur en séries, réductions faites, en négligeant les puissances de A supérieures à la seconde on obtient

$$x = B + A \sin B + \frac{1}{2} A^2 \sin^2 B.$$

Voyez d'ailleurs l'*Algèbre* de M. Bertrand, 2[e] édition, page 404 et la *Mécanique* de M. Duhamel, 2[e] édition, tome II, page 66.

Deuxième cas. $A = 1$. Si de plus $B = k\pi$, il y a une racine triple $x = B$.

En général, il y a une racine unique comprise entre $B - 1$ et $B + 1$,

Troisième cas. $A > 1$. x est compris entre $A + B$ et $-A + B$; des considérations géométriques simples montrent que :

1°. Le nombre de racines est impair ;

2°. La courbe (2) est formée de parties qui se reproduisent et que j'appelle *arcs périodiques ;*

3°. Chaque arc périodique complet ne peut renfermer que deux intersections situées sur le même demi-axe, lorsque la droite (1) ne coupe pas l'axe des x entre les extrémités de l'arc périodique ;

4°. L'arc périodique complet entre les extrémités duquel la droite (1) coupe l'axe des x renferme trois intersections;

5°. Si dans chaque demi-axe périodique contenant deux intersections on mène un tangente parallèle à la droite (1), le point de contact dont l'abscisse satisfait à l'équation

$$A \cos x = 1$$

sépare les deux intersections.

Les racines seront donc facilement séparées et comptées.

Dans le cas particulier où $B = k\pi$, l'une des racines est B; les autres, prises deux à deux, ont B pour moyenne arithmétique.

Application numérique.

$$x = 3,142 \sin x + 1,57.$$

On peut encore écrire

$$x = \pi \sin x + \frac{\pi}{2}.$$

Il y a une racine positive comprise $\frac{\pi}{2}$ et π, une racine négative égale à $-\frac{\pi}{2}$ et une autre racine négative comprise entre o et l'arc qui a pour cosinus 0,3183, c'est-à-dire 71° 27'.

La construction graphique montre que la racine positive est environ 2,7 ou en degrés 157°.

Les deux racines négatives ont sensiblement pour moyenne arithmétique l'abscisse du point de contact de la tangente qui les sépare ou 71° 27'. L'une des racines étant 90 degrés, l'autre sera sensiblement 52° 54'.

Il reste à traduire ces arcs en nombre, à appliquer la méthode de Newton et à vérifier le résultat, opérations faciles sur lesquelles nous n'insistons pas.

SOLUTION DE LA QUESTION 390

(voir p. 184);

PAR M. GUSTAVE MICHAUX,
Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouché).

Soit AEFD un rectangle; de F on abaisse une perpendiculaire FG sur la diagonale DE; par G on mène une parallèle au côté EF rencontrant le côté AE en C et une parallèle GB au côté DF rencontrant AD en B. Faisons

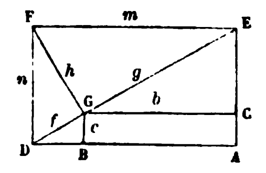
$$\mathrm{EF} = m, \quad \mathrm{DF} = n, \quad \mathrm{DE} = d, \quad \mathrm{EG} = h,$$
$$\mathrm{CG} = b, \quad \mathrm{BG} = c, \quad \mathrm{DG} = f, \quad \mathrm{EG} = g,$$

on a

$$h^3 = bcd, \quad d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}, \quad d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$$

(H. MONTUCCI, professeur au lycée Saint-Louis.)

Il est d'abord facile de voir que les divers triangles de la figure sont tous semblables. En effet les deux triangles



DFG, EFG sont déjà semblables au triangle DFE, puisque la ligne FG $= h$ est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse. D'un autre côté, le triangle GCE est aussi semblable au triangle DEA, et par suite à son égal DFE, car GC est parallèle à DA : de même le triangle DGB est semblable au triangle DFA, à cause du parallélisme des droites GB, EA. On voit en outre que tous ces triangles sont rectangles.

Cela posé, il est aisé de démontrer les trois relations en question.

1°. $h^3 = bcd.$

Le triangle DFE donne la relation connue

$$h^2 = fg.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par h,

$$h^3 = fgh.$$

Or les triangles semblables GEC, DEA donnent

$$\frac{g}{b} = \frac{d}{m},$$

d'où

$$g = \frac{bd}{m},$$

et, en remplaçant,

$$h^3 = bd\frac{fh}{m}.$$

Enfin, de la similitude des triangles DBG, FGE résulte l'égalité

$$\frac{c}{f} = \frac{h}{m},$$

d'où

$$c = \frac{fh}{m}.$$

La relation

$$h^3 = bd\frac{fh}{m}$$

se réduit ainsi à

$$h^3 = bcd.$$

C. Q. F. D

2°. $d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}.$

L'égalité

$$\frac{g}{b} = \frac{d}{m},$$

établie précédemment, donne

$$d = \frac{mg}{b},$$

d'où

$$d^2 = \frac{m^2 g^2}{b^2}.$$

De la similitude des triangles GEC, GEF résulte aussi l'égalité

$$\frac{b}{g} = \frac{g}{m},$$

d'où

$$g^2 = mb.$$

Remplaçant g^2 par cette valeur dans l'expression de α^2, il vient

$$d^2 = \frac{m^3 b}{b^2} = \frac{m^3}{b}.$$

On aurait de même, à cause de la similitude des triangles DBG, DEA,

$$\frac{d}{f} = \frac{n}{c},$$

d'où

$$d = \frac{nf}{c} \quad \text{et} \quad d^2 = \frac{n^2 f^2}{c^2};$$

ou bien, à cause de la relation

$$\frac{c}{f} = \frac{f}{n}$$

(qui résulte de la similitude des triangles DBG, DFG),

$$d^2 = \frac{n^3 c}{c^2} = \frac{n^3}{c}.$$

Donc

$$\frac{m^3}{b} = \frac{n^3}{c},$$

d'où, en extrayant la racine cubique des deux membres,

$$\frac{m}{\sqrt[3]{b}}=\frac{n}{\sqrt[3]{c}};$$

et enfin, en élevant au carré les deux membres,

$$\frac{m^2}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{n^2}{\sqrt[3]{c^2}}.$$

On déduit de là

$$\sqrt[3]{c^2}=\sqrt[3]{b^2}\cdot\frac{n^2}{m^2};$$

de sorte que le binôme

$$\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\sqrt[3]{b^2}+\frac{n^2}{m^2}\sqrt[3]{b^2}$$

ou

$$\sqrt[3]{b^2}\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)=\sqrt[3]{b^2}\left(\frac{m^2+n^2}{n^2}\right)=\sqrt[3]{b^2}\,\frac{d^2}{m^2},$$

car

$$d^2=m^2+n^2.$$

Mais

$$d^2=\frac{m^3}{b};$$

donc

$$\sqrt[3]{b^2}\,\frac{d^2}{m^2}=\sqrt[3]{b^2}\,\frac{m^3}{bm^2}=\sqrt[3]{b^2}\,\frac{m}{b}=\sqrt[3]{\frac{bm^3}{b^2}}=\sqrt[3]{\frac{m^3}{b}}=\sqrt[3]{d^2}.$$

Donc enfin

$$\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}=\sqrt[3]{d^2}$$

ou bien

$$d^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}.$$

C. Q. F. D.

3°. $d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$

On a, d'après le théorème de Pythagore, les trois équations

$$d^2 = m^2 + n^2,$$
$$b^2 = g^2 - (n - c)^2 = g^2 - (n^2 + c^2 - 2mc),$$
$$c^2 = f^2 - (m - b)^2 = f^2 - (m^2 + b^2 - 2mb).$$

Retranchant membre à membre les deux dernières équations de la première, il vient

$$d^2 - b^2 - c^2 = m^2 + n^2 - g^2 + n^2 + c^2 - 2nc - f^2 + m^2 + b^2 - 2mb;$$

d'ailleurs

$$d = f + g,$$

donc

$$f^2 + g^2 = d^2 - 2fg,$$

ou, en remplaçant,

$$d^2 - b^2 - c^2 = 2m^2 + 2n^2 - d^2 + 2fg + b^2 + c^2 - 2nc - 2nb,$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$d^2 - b^2 - c^2 = m^2 + n^2 - mb - nc + fg.$$

Mais nous avons vu plus haut que

$$mb = g^2, \quad nb = f^2;$$

donc

$$m^2 - mb = m^2 - g^2 = h^2, \quad n^2 - nc = n^2 - f^2 = h^2,$$

et comme $h^2 = fg$, il vient enfin

$$d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$$

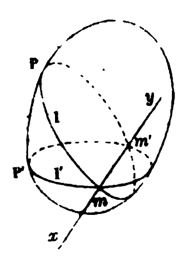
C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 319

(voir tome XV, page 52);

PAR M. P. CHALLIOT,
Élève au lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Deux plans P et P′ coupent une surface suivant deux courbes I et I′; la projection de la courbe I sur le plan P′



sera tangente à la courbe I′ au point où la trace de P sur P′ pourra couper I′, si les coordonnées de ces points satisfont à l'équation

$$D_z . F = 0$$

déduite de l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

de la surface par rapport à trois axes rectangulaires dont deux, ceux sur lesquels on compte les x et les y, doivent être dirigés dans le plan P′.

La condition

$$D_z . F = 0,$$

nécessaire et suffisante pour que le contact dont il s'agit ait lieu, est remplie pour les surfaces du deuxième ordre quand P′ est un plan principal. (DIEU.)

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface.

Je prends le plan P' pour plan des x, y.

L'équation de la courbe I' s'obtiendra en faisant $z=0$ dans l'équation de la surface

$$F(x, y) = 0.$$

Soient x', y', o les coordonnées d'un des points m, où la trace xy du plan P sur le plan P' coupe la courbe I'. Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe I' au point m sera

$$\alpha = -\frac{F'_x(x', y')}{F'_y(x', y')}.$$

Soit

$$z = mx + ny + p$$

l'équation du plan P. L'équation de la projection de la courbe I sur le plan P' s'obtiendra par l'élimination de z entre les deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad z = mx + ny + p.$$

Pour avoir le coefficient angulaire de la tangente à cette projection au point m, appliquons le théorème des fonctions implicites, on aura

$$\alpha' = -\frac{F'_x(x', y') + mF'_z(x', y', 0)}{F'_y(x', y') + nF'_z(x', y', 0)}.$$

Comme par hypothèse

$$F'_z(x', y', 0) = 0,$$

il s'ensuit que $\alpha = \alpha'$. Les deux tangentes ayant un point commun et même coefficient angulaire, coïncident.

Je dis en second lieu que la condition

$$F'_z = 0$$

est remplie pour les surfaces du deuxième ordre quand P′ est un plan principal.

Je rapporte la surface à ce plan et à une droite qui lui soit perpendiculaire. L'équation ne devra pas contenir de termes en z, première puissance. Elle sera de la forme

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B xy + 2 C x + 2 C' y + F = 0.$$

Prenant la dérivée par rapport à z, j'aurai

$$F'_z = 2 A'' z,$$

et comme le point de contact en question est dans le plan des x, y, on a

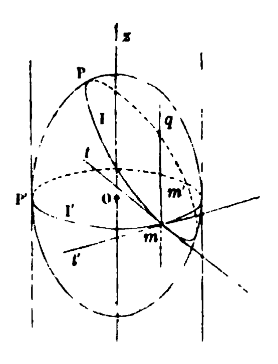
$$z' = 0,$$

donc

$$F'_z = 0.$$

Le théorème précédent peut se vérifier géométriquement pour les surfaces du second ordre.

Si par les différents points de la section principale P′mm', on mène des parallèles à l'axe des z, ces droites



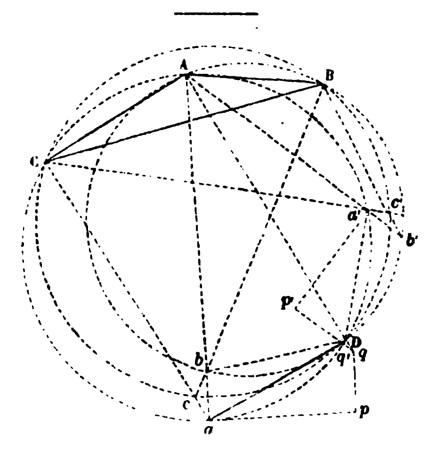
seront perpendiculaires au plan P′. Toutes ces parallèles

forment une surface cylindrique tangente à la surface du deuxième ordre. Si par la génératrice *mq* on fait passer un plan tangent à la surface cylindrique, il le sera en même temps à la surface proposée. Ce plan coupe le plan P′ suivant une tangente *mt′* à la courbe I′, et le plan P suivant *mt* tangente à I. Or la projection de cette dernière tangente est tangente à la projection de I, et comme *mt* est dans un plan *qmt′* perpendiculaire au plan P′, elle se projette suivant la trace *mt′*.

TOPOGRAPHIE.

DÉTERMINATION D'UN POINT PAR TROIS AUTRES POINTS CONNUS;

Par M. POUDRA.



Ce problème dit de Pothenot se résout ordinairement par la construction de trois segments de cercle capables des angles observés. Cette solution n'est pas facile à employer sur le terrain, les circonférences à décrire sont trop grandes. Voici une construction qui me semble plus commode.

La planchette ayant été placée horizontalement, on l'oriente à peu près, et on vise avec l'alidade les trois points connus A, B, C : on obtient trois droites Aba, Bbc, Cca. Si l'orientation de la planchette était exacte, ces trois droites se couperaient en un seul et même point D qui serait le point cherché. Dans le cas contraire, on obtient un petit triangle d'erreur abc ; on change alors un peu l'orientation de la planchette, et, par le même procédé, on obtient alors un autre petit triangle $a'b'c'$.

Si l'on décrivait sur AB comme corde un segment capable de l'angle $A\hat{b}B$, il passerait par b et b'. Le segment sur CB, capable de l'angle $B\hat{c}C$, passerait par c et c'. Enfin le segment décrit sur AC, capable de l'angle $A\hat{a}C$, passerait par a et a'. Ces trois segments se couperaient en un seul et même point D qui serait le point cherché; mais il résulte évidemment de cette construction que non-seulement les petits triangles abc, $a'b'c'$ sont semblables, mais que les triangles Dab, Dac, Dbc sont respectivement semblables aux triangles $Da'b'$, $Da'c'$, $Db'c'$. D'où résulte que le quadrilatère $Dabc$ est semblable au quadrilatère $Da'b'c'$, et comme les trois points a, b, c du premier sont déterminés de position, ainsi que les points a', b', c' du second, il en résulte que le point D commun est déterminé.

Pour l'obtenir, on élève à Aa une perpendiculaire ap égale à un nombre quelconque de fois ab. De même en a' on élève à Aa' la perpendiculaire $a'p'$ égale au même nombre de fois $a'b'$, puis par p on mène une parallèle pq à Aa et par p' une parallèle $p'q'$ à $A'a$. Ces deux droites se coupent en un point q, et la droite Aq doit contenir le point D cherché. On trouverait de même des droites BD et CD passant par ce même point D. Donc il est déterminé.

QUESTIONS.

396. Par le sommet A d'un triangle plan ABC, mener une droite telle, que les perpendiculaires BB′, CC′ abaissées respectivement des sommets B et C sur cette droite, forment deux triangles rectangles ABB′, ACC′ *équivalents*.

397. Discuter la courbe du quatrième degré donnée par l'équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}.$$

(Montucci.)

398. Soient donnés un tétraèdre quelconque *abcd* et dans son intérieur un point *o* tel, que les droites *oa*, *ob*, *oc* déterminent un angle trirectangle; je prolonge les droites *oa*, *ob*, *oc*, *od* jusqu'en *a′*, *b′*, *c′*, *d′*, où elles coupent les faces opposées aux points *a*, *b*, *c*, *d*. On a

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{oa}+\frac{1}{oa'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{ob}+\frac{1}{ob'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{oc}+\frac{1}{oc'}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{od}+\frac{1}{od'}\right)^2}.$$

(Mannheim.) (*)

(*) Voici la rectification d'un énoncé qui n'a pas été exactement inséré en février 1856.

En conservant les notations employées, on doit lire

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)^2=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)^2}.$$

Cette dernière partie et le théorème sur le tétraèdre que je viens d'énoncer sont complétement analogues.

399. Les données restant les mêmes, je mène par le point o des plans parallèles aux faces du tétraèdre, ces plans déterminent dans chaque angle trièdre des parallélipipèdes dont je désigne les volumes par P_a, P_b, P_c, P_d. On a

$$\left(\frac{oa}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{ob}{P_b}\right)^2 + \left(\frac{oc}{P_c}\right)^2 = \left(\frac{od}{P_d}\right)^2.$$

(MANNHEIM.)

400. Soit u une fonction *rationnelle* et *entière* du degré n d'un nombre *quelconque* de variables x, y, z, etc., et soient du, $d^2 u, \ldots, d^n u$ les différentielles successives qu'on obtient, mais en supposant que dx, dy, dz, etc., sont *constantes* (*). Formons l'équation

$$\begin{aligned} t^n d^n u + ut^{n-1} d^{n-1} u + n(n-1) t^{n-2} d^{n-2} u \\ + n.n-1.n-2\ t^{n-3} d^{n-3} u + \ldots \\ + n.n-1\ n-2 \ldots 2tdu \\ + n.n-1.n-2\ \ldots 2,1\, u = 0. \end{aligned}$$

Formons une fonction symétrique *quelconque* rationnelle et entière des *différences* des racines de cette équation ; sa valeur est une fonction entière des coefficients $d^n u$, $d^{n-1} u$, $d^{n-2} u, \ldots, du$, u, et par conséquent une fonction de x, y, $z, \ldots$, dx, dy, dz ; si l'on différentie cette dernière fonction en traitant dx, dy, $dz, \ldots$, comme des constantes, on trouve un résultat *identiquement* nul.

(MICHAEL ROBERTS.)

Note du Rédacteur.

Exemple. Soit

$$n = 2$$

et

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2,$$
$$du = 2(axdx + bydy + czdz),$$
$$d^2 u = 2(adx^2 + bdy^2 + cdz^2),$$

(*) Alors du renferme dx, dy, dz, $d^2 u$ renferme dx^2, $dydx$, dy^2, etc., et $d^{n+1} = 0$.

l'équation en t est

$$t^2 d^2 u + 2tdu + 2u = 0.$$

Choisissons pour fonction symétrique la somme des carrés des différences des racines ; cette somme est

$$4(du^2 - 2ud^2u)$$

$$= -16 \left[\begin{array}{l} ab(xdy - ydx^2) + ac(xdz - zdx)^2 \\ + bc(ydz - zdy)^2 \end{array} \right];$$

différentiant cette valeur en regardant dx, dy, dz comme constants, le résultat est identiquement nul.

NOTE SUR DEUX QUESTIONS

énoncées p. 109 ;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Trouver le rayon de la base supérieure d'un tronc de cône, sachant que le rayon de la base inférieure égale le rayon R d'une sphère donnée et que le volume du tronc de cône et celui de la sphère sont dans un rapport donné m.

Enoncé *incomplet*. Au lieu de *sphère donnée*, il faut peut-être lire : *cône donné de même hauteur*.

L'équation du problème rectifié serait

$$x^2 + Rx + R^2(1 - m) = 0.$$

Discussion. $m < \frac{3}{4}$, racines imaginaires. Problème impossible.

$m = \frac{3}{4}$, racines égales ; $x = -\frac{R}{2}$. Pas de solution directe. Solution indirecte en imaginant un cône droit à base circulaire coupé par un plan parallèle à sa base,

comme dans le cas du tronc de cône ordinaire, mais de l'autre côté du sommet de manière à figurer deux cônes opposés par le sommet. Le plus petit de ces cônes aurait pour rayon $\frac{R}{2}$ et la somme des deux aurait le volume demandé.

$1 > m > \frac{3}{4}$, racines négatives. Deux solutions indirectes.

$m = 1$, une racine négative et une racine nulle. Une solution indirecte et une solution directe donnant un cône proprement dit.

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Le produit de quatre nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.

Soit $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ le produit considéré.

On a

$$(n+1)(n+4) = n^2 + 5n + 4$$

et

$$(n+2)(n+3) = n^2 + 5n + 6;$$

donc

$$(n+2)(n+3) = (n+1)(n+4) + 2.$$

D'ailleurs $(n+1)(n+4)$ est en nombre pair.

En posant

$$(n+1)(n+4) = 2p,$$

il viendra

$$(n+2)(n+3) = 2p + 2 = 2(p+1),$$

et, par suite,

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 2p \times 2(p+1) = 4p(p+1).$$

Or le produit $p(p+1)$ de deux nombres entiers consécutifs ne peut être un carré ; donc il en est de même de $4p(p+1)$ ou du produit $n(n+1)(n+2)(n+3)$ de quatre nombres entiers consécutifs. G.

Remarque. En admettant ce principe que : *si* p *est un nombre premier, il y a au moins un autre nombre premier compris entre* p *et* 2 p, il est clair que le produit $1.2.3...n$ ne peut être un carré ; car en désignant par p le plus grand nombre premier de la suite $1, 2, 3, ..., n$, on aura $n < 2p$, et, par conséquent, le nombre premier p n'entrera qu'à la première puissance dans le produit $1.2.3... n$; donc ce produit ne sera pas un carré. G.

RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$a^x - b^y = 1,$$

a et b étant des nombres premiers.

Je distingue ces deux cas : $a = 2$, $a > 2$.

1°. $a = 2$. L'équation à résoudre est

$$2^x - b^y = 1.$$

On en tire successivement :

$$2(2^{x-1} - 1) = b^y - 1 = (b-1)(b^{y-1} + b^{y-2} + ... + b + 1);$$

$$2^{x-1} - 1 = \frac{b-1}{2}(b^{y-1} + b^{y-2} + ... + b + 1).$$

Cette dernière équation montre que

$$b^{y-1} + b^{y-2} + ... + b + 1$$

doit être un nombre impair. Et comme le nombre des

termes de

$$b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1$$

est y et qu'en outre le nombre premier b est impair, il faut que y soit aussi un nombre impair. Il en résulte que $b^y + 1$ est exactement divisible par $b + 1$: mais

$$b^y + 1 = 2^x;$$

donc 2^x est divisible par $b + 1$, ce qui exige que $b + 1$ soit une puissance de 2, c'est-à-dire que le nombre premier b ait la forme $2^n - 1$.

En divisant par $b + 1$ les deux membres de l'équation proposée

$$b^y + 1 = 2^x,$$

elle se transforme en celle-ci :

$$b^{y-1} - b^{y-2} + b^{y-3} - \ldots + b^2 - b + 1$$
$$= \frac{2^x}{b+1} = \frac{2^x}{2^n} = 2^{x-n}.$$

Or $b^{y-1} - b^{y-2} + b^{y-3} + \ldots + b^2 - b + 1$ est nécessairement un nombre impair, puisque b et y sont impairs; donc il faut qu'on ait

$$2^{x-n} = 1;$$

d'où

$$x = n,$$

et, par suite,

$$y = 1.$$

De ce qui précède, nous concluons que l'équation proposée

$$2^x - b^y = 1$$

n'a aucune solution entière si le nombre premier b n'a pas la forme $2^n - 1$, et que si b a cette forme, l'équation admet une solution entière et une seule qui est

$$x = n, \quad y = 1.$$

2°. $a > 2$. L'équation

$$a^x - b^y = 1$$

donne

$$a^x - 1 = b^y :$$

mais $a^x - 1$ est un nombre pair ; donc

$$b = 2.$$

D'ailleurs b^y est exactement divisible par $a - 1$; par conséquent $(a - 1)$ est une puissance de 2, c'est-à-dire que le nombre premier a doit avoir la forme $2^n + 1$. Ces deux conditions étant supposées remplies, l'équation proposée devient

$$(2^n + 1)^x - 2^y = 1 ;$$

elle est vérifiée par

$$x = 1, \quad y = n ;$$

il reste à examiner si elle peut avoir d'autres solutions entières.

Supposons que l'équation

$$(2^n + 1)^x - 2^y = 1$$

ou

$$(2^n + 1)^x - 1 = 2^y$$

puisse admettre une solution entière dans laquelle on ait $x > 1$, la valeur correspondante de y sera évidemment plus grande que n, et en divisant par $(2^n + 1) - 1$ les deux membres de

$$(2^n + 1)^x - 1 = 2^y,$$

il en résultera cette nouvelle équation

$$(2^n + 1)^{x-1} + (2^n + 1)^{x-2} + \ldots + (2^n + 1) + 1 = \frac{2^y}{2^n} = 2^{y-n},$$

dont le second membre sera un nombre pair. Il en sera

de même du premier, et il faudra que x soit aussi un nombre pair. Dans ce cas, $(2n+1)^x - 1$ est exactement divisible par $(2^n+1)+1$ ou $2(2^{n-1}+1)$. Donc $2^{n-1}+1$ devra diviser 2^y, ce qui entraîne la condition $n=1$. En supposant qu'elle soit remplie, l'équation proposée devient

$$3^x - 1 = 2^y \quad \text{ou} \quad 2^y + 1 = 3^x.$$

On voit que y doit être impair, puisque 2^y+1 admet le diviseur 3 ou $2+1$. En effectuant la division des deux membres par $2+1$, on a

$$2^{y-1} - 2^{y-2} + 2^{y-3} - 2^{y-4} + \ldots + 2^2 - 2 + 1 = 3^{x-1},$$

d'où

$$(2^{y-1}-1) - (2^{y-2}+1) + (2^{y-3}-1) - \ldots + (2^2-1)$$
$$-(2+1) + y = 3^{x-1}.$$

Mais les différences

$$(2^{y-1}-1),\ (2^{y-2}+1),\ (2^{y-3}-1), \ldots$$

sont des multiples de 3, donc y est multiple de 3; et comme x est pair, on pourra poser

$$y = 3y', \quad x = 2x' \ (*):$$

il s'ensuivra

$$3^{2x'} - 1 = 2^{3y'} \quad \text{ou} \quad 9^{x'} - 1 = 8^{y'}.$$

Cette dernière équation n'admet que la solution entière

$$x' = 1, \quad y' = 1.$$

En effet, x' ne peut être un nombre pair, puisque $8^{y'}$

(*) En général, dans l'équation

$$(a+1)^x - a^y = 1,$$

l'inconnue x ne peut admettre pour valeur entière, différente de l'unité, qu'un multiple de a, et toute valeur entière de y plus grande que l'unité est nécessairement multiple de $a+1$.

par n un nombre entier quelconque plus grand que m,

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = x^m - n(x+6)^m + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(x+26)^m \\ \qquad - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x+36)^m + \ldots \\ \qquad \mp n[x+(n-1)6]^m \pm (x+n6)^m; \end{cases}$$

ce qui établit une relation entre les puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, en admettant toutefois que le nombre de ces termes surpasse de deux unités, au moins, le degré de la puissance qui leur est commune (*).

Si l'on pose

$$x = 0 \quad \text{et} \quad 6 = 1,$$

l'équation (5) devient

$$0 = n^m - n(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m + \ldots,$$

formule connue, que nous n'avons rappelée ici qu'afin de montrer qu'elle est implicitement comprise dans la formule d'Abel.

(*) Le second membre de l'équation (5) est, au signe près, la différence $n^{ième}$ de la fonction x^m dans laquelle on donne à la variable des accroissements successifs égaux à 6. Or on suppose $n > m$, donc cette différence doit être nulle quelles que soient les valeurs de x et de 6.

G.

QUESTIONS.

401. On projette un point d'une ellipse sur ses deux axes; démontrer que l'enveloppe de la droite qui joint les deux projections est la développée d'une ellipse.

Même question pour l'hyperbole.

402. On projette orthogonalement un point d'un ellipsoïde sur ses trois plans principaux; trouver l'enveloppe du plan qui passe par les trois points.

Même question pour les deux hyperboloïdes.

403. Ecrire l'équation d'un faisceau de surfaces qui passent par le point (x', y', z') et par l'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

404. Deux points matériels parcourent d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données en grandeur et en direction, deux droites situées dans l'espace; trouver l'équation de la surface décrite par la droite variable qui passe par deux positions simultanées des points matériels.

405. Etant donnée l'équation

$$(x^3 + y^3 - z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z') = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ,$$

comment trouver les valeurs de X, Y, Z en fonction de x, y, z, x', y', z'. (MICHAEL ROBERTS.)

406. Soient

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

les équations rendues homogènes de trois cercles, l'équa-

tion du cercle qui coupe ces trois cercles à angle droit est donnée par cette relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

(Rév. GEORGE SALMON.)

Observation. On rend une équation homogène en remplaçant x, y par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, et on fait finalement $z = 1$. $\frac{dU_1}{dx}$ est la dérivée de U_1 par rapport à x ; de même $\frac{dU_1}{dy}$, etc. Les barres désignent un déterminant.

407. Etant données deux coniques dans un même plan, le lieu d'un point tel, que les quatre tangentes menées de ce point aux quatre coniques forment un faisceau harmonique est une conique. (Rév. GEORGE SALMON.)

408. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 \end{vmatrix} = a_1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2,$$

et en général

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\ldots & & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1\ldots & & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2\ldots & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_3\ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

409. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = a_1 + a_2 + a_1 a_2,$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3,$$

et en général

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_2 \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 \ldots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

410. Si l'on désigne par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos n\alpha_0 & \cos(n-1)\alpha_0 & \cos(n-2)\alpha_0 \ldots & \cos 0\,\alpha_0 \\ \cos n\alpha_1 & \cos(n-1)\alpha_1 & \cos(n-2)\alpha_1 \ldots & \cos 0\,\alpha_1 \\ \cos n\alpha_2 & \cos(n-1)\alpha_2 & \cos(n-2)\alpha_2 \ldots & \cos 0\,\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos n\alpha_n & \cos(n-1)\alpha_n & \cos(n-2)\alpha_n \ldots & \cos 0\,\alpha_n \end{vmatrix}$$

et par D_1 e déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos^n \alpha_0 & \cos^{n-1} \alpha_0 & \cos^{n-2} \alpha_0 \ldots & \cos^0 \alpha_0 \\ \cos^n \alpha_1 & \cos^{n-1} \alpha_1 & \cos^{n-2} \alpha_1 \ldots & \cos^0 \alpha_1 \\ \cos^n \alpha_2 & \cos^{n-1} \alpha_2 & \cos^{n-2} \alpha_2 \ldots & \cos^0 \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos^n \alpha_n & \cos^{n-1} \alpha_n & \cos^{n-2} \alpha_n \ldots & \cos_0 \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1.$$

(Prouhet.)

411. Si l'on désigne par D_2 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 \ldots & \sin\alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 \ldots & \sin\alpha_1 \\ \sin(n+1)\alpha_2 & \sin n\alpha_2 \ldots & \sin\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n \ldots & \sin\alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D_2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n D_1.$$

(PROUHET.)

412. En adoptant la notation bien commode de M. Cayley, posons l'équation

$$(a, b, c, d, e, f, g, \ldots)(x, 1)^n = 0$$

dont les racines sont x_1, x_2, x_3,..., x_n. Démontrer les formules suivantes

$$2a^4 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 = n^2(n-1)(n-2) \times \left\{ n^2(b^2 - ac)^2 + \frac{n-3}{6} a^2 (ae - 4bd + 3c^2) \right\},$$

$$6a^6 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 = n^3(n-1)(n-2)$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} n^4(n-3)(b^2 - ac)^3 + \dfrac{n^2}{2}(n^2 - 5n + 8) a^2 (b^2 - ac) \\ \times (ae - 4bd + 3c^2) \\ - \dfrac{n}{2}(7n - 15) a^3 (ad^2 + eb^2 + c^3 - 2bcd - ace) \\ - \dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)a^4}{60} \\ \times (ag + 15ec - 10d^2 - 6bf). \end{array} \right\}.$$

Il est très-digne de remarque que la quantité

$$ag + 15ec - 10d^2 - 6bf$$

est un invariant pour les fonctions homogènes à deux variables du sixième degré.

(Michael Roberts.)

Note du Rédacteur. La fonction homogène à deux variables de degré n peut évidemment s'écrire sous la forme

$$a_0x^n + na_1x^{n-1}y + \frac{n.n-1}{1.2}a_2x^{n-2}y^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a_3x^3y^3 + \ldots + na_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = \mathrm{F}.$$

C'est cette forme que M. Cayley représente d'une manière si expressive et si mnémonique par

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$

Si l'on fait

$$y = 1,$$

on a une expression à une variable; le révérend M. Roberts a remplacé a_0, a_1, a_2, etc., par a, b, c, d.

Covariants et invariants.

Si dans la fonction F on remplace x par $\lambda x + \mu y$ et y par $\lambda' x + \mu' y$, il est clair que la fonction garde encore la forme

$$(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)(x, y)^n,$$

où les a' sont des fonctions des a et des quatre constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$.

Soient

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x, y)$$

une fonction quelconque des a et de x, y, et

$$\varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots a'_n, x, y)$$

la fonction analogue en a' et x, y; mais les a' étant des

fonctions des a, il s'ensuit que cette dernière fonction est aussi une fonction des a. Si la fonction φ est prise de telle manière que l'on ait l'identité

$$\begin{aligned}&\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x, y)\\&= (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p \varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, x, y),\end{aligned}$$

où p est un nombre entier positif, alors la fonction φ est dite *covariant* de F. Si l'on avait simplement la fonction

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

sans x et sans y et qu'on ait l'identité

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p \varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n),$$

alors φ est un *invariant* de la fonction F.

Exemple. Soit

$$n = 3,$$

$$F = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3.$$

$$\lambda = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 1;$$

on trouve

$$\begin{aligned}a'_0 &= a_0,\\a'_1 &= a_1 + a_0\mu,\\a'_2 &= a_2 + 2a_1\mu + a_0\mu^2,\\a'_3 &= a_3 + 3a_2\mu + 3a_1\mu^2 + a_0\mu^3.\end{aligned}$$

Prenons

$$\varphi = (a_1^2 - a_0 a_2)x^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3)xy + (a_2^2 - a_1 a_3)y^2;$$

désignons par Φ la fonction analogue en a'; si l'on y remplace ensuite les a' par leurs valeurs en a, on trouve

$$p = 0, \quad \text{et} \quad \varphi = \Phi.$$

Cette fonction φ jouit donc de la propriété qui la rend un *covariant* de F.

Soit

$$n = 2,$$

alors

$$F = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2;$$

alors

$$a'_0 = a_0 \lambda^2 + 2 a_1 \lambda\lambda' + a_2 \lambda'^2,$$

$$a'_1 = a_0 \lambda\mu + a_1 (\lambda\mu' + \lambda'\mu) + a_2 \lambda'\mu',$$

$$a'_2 = a_0 \mu^2 + 2 a_1 \mu\mu' + a_2 \mu'^2.$$

Prenons

$$\varphi = a_1^2 - a_0 a_2,$$

sans x, y; alors

$$\Phi = a_1'^2 - a'_0 a'_2,$$

et remplaçant les a' par leurs valeurs en a, on trouve

$$\Phi = (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2 \varphi,$$

et φ est un *invariant* de F; si

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1;$$

alors

$$\Phi = \varphi$$

(*voir* la Note de M. Combescure, p. 193 de la *Théorie des déterminants*).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 377 (HARRISON)

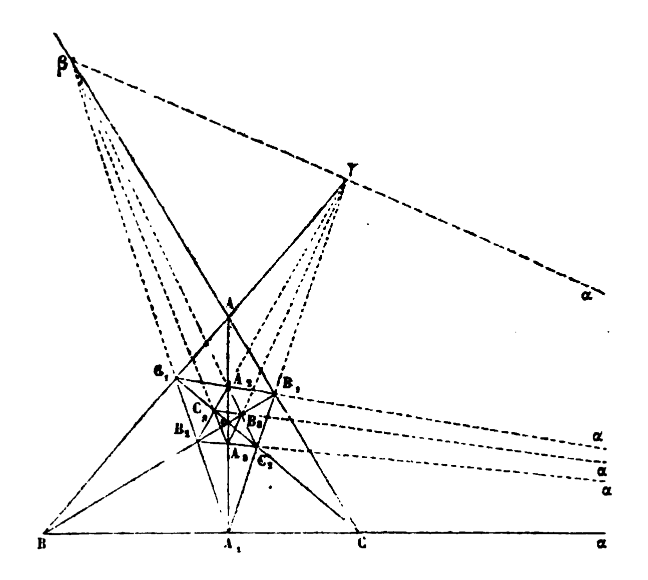
(voir p. 179);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Pour abréger, je ne répète pas l'énoncé qui est assez long.

1°. Je vais prouver que les droites AB, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, etc., concourent en un même point γ; que les droites AC,

A_1C_1, A_2C_2, etc., concourent en un même point β, et enfin que les droites BC, B_1C_1, B_2C_2, etc., concourent en un même point α.



Les deux triangles BA_1B_2 et AB_1A_2 sont homologiques, parce que leurs côtés se coupent deux à deux en trois points C, O, C_1 situés en ligne droite, savoir :

BA_1 et AB_1 en C; BB_2 et AA_2 en O, point de concours des trois hauteurs du triangle ABC; et B_2A_1 et B_1A_2 en C_1.

Donc (*Géom. sup.*, n° 366) leurs sommets se trouvent deux à deux sur trois droites AB, A_1B_1, A_2B_2 qui passent par un même point γ.

On prouverait de même que A_3, B_3 passe par le point γ, en considérant les triangles homologiques $B_1A_2B_2$ et $A_1B_2A_3$, et ainsi de suite.

Même démonstration à l'égard des deux autres systèmes

de droites AC, A_1C_1, A_2C_2, etc., et BC, B_1C_1, B_2C_2, etc.

2°. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont homologiques. Donc les trois points de concours de leurs côtés homologues sont en ligne droite : ces points sont α, β, et γ. (*Géom. sup.*, n° 365).

3°. Considérons le quadrilatère $ABOC$. Les points A_1, B_1, C_1 sont respectivement les points de concours de ses deux diagonales et de ses côtés opposés. Donc les deux diagonales A_1A et A_1C sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites A_1B_1, A_1C_1 (*Géom. sup.*, n° 346). Or les deux diagonales sont rectangulaires; donc A_1A bissecte l'angle $B_1A_1C_1$ (*Géom. sup.*, n° 80).

Mais cette propriété ne s'étend pas aux autres angles tels que $B_2A_2C_2$, etc.

Car si l'on considère le quadrilatère $A_1B_1OC_1$, on aura pareillement A_2A_1 et A_2B_1 conjuguées harmoniques par rapport à A_2B_2 et A_2C_2. Donc si A_2A_1 bissectait l'angle B_2AC_2, A_2B_1 serait perpendiculaire sur A_2A_1 (*Géom. sup.*, n° 80), autrement dit les droites $A_2\alpha$ et $A_1\alpha$ seraient parallèles, ce qui n'a pas lieu en général.

Note du Rédacteur. On peut considérer OA, OB, OC comme les projections des arêtes d'un angle trièdre et ABC, $A_1B_1C_1$ comme les projections des deux sections triangulaires faites dans le trièdre; dès lors les propriétés géométriques des points α, β, γ deviennent intuitives: moyen de démonstration indiqué par M. Brianchon depuis nombre d'années. L'erreur signalée ici existe dans le texte anglais que j'ai copié de confiance; il reste à démontrer la partie analytique, la partie essentielle du théorème.

Prochainement une solution complète par M. Richard d'Oxamendi.

ASTRONOMIE.

Sur la théorie du double mouvement des planètes de Jean Bernoulli ;

D'APRÈS M. W. HARTWIG.

Astr. Nach., t. XLI, n° 968; 1855.

Jean Bernoulli est le premier qui ait déduit le double mouvement de révolution et de rotation des planètes d'un choc dont la direction ne passe pas par le centre de gravité (*Opera omn.*, t. IV, p. 282 ; 1742). Il est aussi le premier qui ait donné une idée nette de l'orbite cycloïdale des molécules d'un mobile solide, et il fait observer que dans le plan qui passe par le centre de gravité et la direction de la force impulsive, le centre spontané de rotation décrit une cycloïde ordinaire ; c'est un cercle de rayon égal à la distance de ce centre au centre de gravité et qui roule sur une droite parallèle à la direction d'impulsion. Les autres points décrivent des cycloïdes *raccourcies* ou *rallongées*. Voici ses paroles :

Hoc sane futurum prævideo, ut more projectilium (a quorum gravitate abstrahitur) centrum gravitatis C *protinus incipiat moveri secundum directionem rectilineam, in qua tunc reperitur, et quidem celeritate uniformi, sicuti jam dudum demonstratum est; atque ita, perseverante rotatione, singula relicta puncta describent curvas cycloïdales, inter quas illa quæ ab ipso puncto* B *describitur, est cycloïs ordinaria* Hugeniana, *habens pro tangente initiali ipsam* BA; *cæteræ vero omnes sunt cycloïdes vel contractæ, vel protractæ prout à puncto* C *vel plus vel minus distant quam punctum* B (p. 279).

B est le centre spontané de rotation et A est le pied de

la perpendiculaire abaissée de B sur la direction de la force impulsive.

Ce sont ces mouvements que M. Poinsot a figurés par deux cônes roulant l'un sur l'autre.

Bernoulli n'a considéré parmi les planètes que la Terre, Mars, Jupiter et la Lune; Schubert, dans son *Traité d'Astronomie théorique* (t. III, 1822) a fait le même calcul en ajoutant Vénus et Saturne.

La Table suivante contient les valeurs selon M. Hartwig, Bernoulli et Schubert.

C = centre de gravité qu'on prend pour centre de la planète supposée sphérique;

B = centre d'oscillation;

A = pied de la perpendiculaire abaissée de B sur la direction de la force impulsive.

Les distances sont exprimées en parties du demi-diamètre de chaque planète.

	HARTWIG.		BERNOULLI.		SCHUBERT.	
	CA	CB	CA	CB	CA	CB
Vénus..	$0,005243 = \frac{1}{191}$	76,3815	....	..	$0,005108 = \frac{1}{196}$	78,30329
Terre...	$0,006095 = \frac{1}{164}$	65,7053	$\frac{1}{105}$	60	$0,006108 = \frac{1}{164}$	65,48498
Mars...	$0,003796 = \frac{1}{263}$	105,509	$\frac{1}{418}$	84	$0,003806 = \frac{1}{263}$	105,09380
Jupiter.	$0,37674 = \frac{55}{146}$	1,06173	$\frac{7}{19}$	$\frac{11}{10}$	$0,364736 = \frac{9}{25}$	1,096684
Saturne	$0,38754 = \frac{112}{268}$	1,01011	...	..	$0,438487 = \frac{11}{25}$	1,912227

On ne découvre dans cette Table aucune marche régulière. Il n'en est pas de même en prenant une unité

commune pour toutes ces planètes, par exemple le rayon de la Terre; alors on a le tableau suivant :

		CB
(A)	Vénus.....	75,3885
	La Terre...	65,7053
	Mars......	54,7589
	Jupiter....	11,9498
	Saturne ...	9,3236

On voit que CB diminue lorsque la distance au Soleil augmente. On ne connaît qu'imparfaitement la durée de la rotation de Mercure; en admettant $24^h\ 5^m$, on trouve

$$CB = 106,260,$$

ce qui s'accorde avec la règle des distances.

M. Hartwig n'a pu parvenir à une équation simple entre ces valeurs et la distance, il n'est parvenu qu'à cette relation transcendante

$$y = a + bc^{-x},$$

où x est la distance au Soleil et $y = CB$.

$$(B)\quad \begin{cases} a = 10,3406, \\ b = 109,9662, \\ c = 1,96393. \end{cases}$$

D'après cette formule, prenant toujours le rayon terrestre pour unité, on a

		CB
(C)	Vénus.....	77,3397
	La Terre...	66,8336
	Mars......	49,6619
	Jupiter....	13,6230
	Saturne....	10,5165

En calculant les valeurs extrêmes que peut avoir CB.

on trouve

		Maximum.	Minimum.
(D)	Vénus.....	95,9075	74,8730
	La Terre..	66,8181	69,6110
	Mars......	60,1253	49,8716
	Jupiter....	12,5398	11,3874
	Saturne....	9,86270	8,81338

Mars présente le plus grand intervalle, c'est aussi la planète qui présente la plus grande erreur dans la Table (C); mais cette valeur dans (C) s'accorde presque avec le minimum dans (D); on voit que chaque maximum est plus petit que le minimum de la valeur précédente; si l'on voulait en tirer une conclusion pour Uranus, CB pour cette planète devrait être au-dessus de 8,81338, et, par conséquent, la durée de sa rotation moindre que $13^h\ 15^m$: on aurait donc une limite supérieure, troisième exemple de la rotation rapide des planètes situées au delà de Mars.

Bernoulli fait déjà la remarque que le centre d'oscillation B de la Terre tombe dans le voisinage de l'orbite de la Lune.

Videmus hinc, punctum B *tam procul a Terra existere ut* BC *sit = circiter* 60 *diametris* (*) *Terræ; atque adeo pertingat usque ad regionem Lunæ. Quod an sit inter raro contingentia numerandum, an vero ex necessitate aliqua physica, effectui Lunæ attribuendæ, consequatur de eo dispiciant physici. Fortassis reperient aliquam rationem a motu et distantia Lunæ repetendam, cur motus annuus et diurnus Terræ eam inter se habeant relationem quam habent; ita ut aliam habere non possint* (p. 283).

(*) Lisez *semi-diametris*.

Ainsi Bernoulli soupçonne qu'il existe une cause physique de cette coïncidence du centre d'oscillation de la Terre avec l'orbite lunaire. Schubert va plus loin.

Il dit : « Le phénomène le plus surprenant est celui » que présentent les centres d'oscillation de la Terre et » de la Lune. Relativement à la Lune, la distance x (CB) » est 220,9 demi-diamètres de la Lune, ce qui fait » $0,27293 \times 220,9$ ou à peu près soixante demi-diamè- » tres de la Terre. Le centre d'oscillation de la Lune » coïncide donc exactement avec le centre de la Terre; » celui de la Terre tombe un peu au delà de la Lune, » x (CB) étant soixante-cinq demi-diamètres de la Terre. » Cette harmonie frappante paraît indiquer un nouveau » lien qui réunit ces deux corps, et il est possible qu'elle » répande un nouveau jour sur cette partie de l'astrono- » mie physique. »

M. Hartwig fait observer que relativement à la Lune la coïncidence est une conséquence de ce que la durée de son mouvement de rotation est égale à celle de son mouvement de révolution autour de la Terre. En effet, soit a la distance de la Lune à la Terre, exprimée en demi-diamètres de la Lune; r le demi-diamètre de la Lune, exprimée en demi-diamètres de la Terre; π la parallaxe solaire; τ la durée du mouvement de rotation; T la durée du mouvement de révolution. On trouve

$$CB = \frac{1}{\sin \pi} \frac{a}{r} \frac{\tau}{T},$$

exprimée en demi-diamètres de la Lune; ou en rapportant tout au demi-diamètre de l'orbite

$$CB = \frac{\tau}{T};$$

mais

$$\tau = T,$$

donc

$$CB = 1;$$

le centre d'oscillation de la Lune doit donc coïncider avec le centre de l'orbite qui est celui de la Terre. Si, comme il paraît vraisemblable, les durées des deux mouvements des satellites de Jupiter coïncident, il faut que le centre d'oscillation de chacun coïncide avec le centre de Jupiter. M. Poinsot fait deux objections à la théorie de Bernoulli. D'abord il est trop spécial de n'admettre qu'une seule force; ensuite cette force a dû être parallèle à l'équateur de la planète et aussi à la tangente menée à l'orbite par le lieu de la planète, et les seuls points où la tangente est parallèle au plan de l'équateur sont l'aphélie et le périhélie. Il faut donc que la planète se soit trouvée primitivement à l'un de ces points et que le choc fût perpendiculaire à la ligne des absides. On peut répondre que cela suppose que l'intersection de l'équateur avec le plan de l'orbite est perpendiculaire à la ligne des absides; rien n'oblige à admettre cette supposition, et alors le parallélisme de la tangente à l'orbite avec le plan de l'équateur peut avoir lieu hors de l'aphélie et du périhélie; quant à la force unique, rien n'empêche que l'on ne recherche quelle devait être la force unique pour produire le double mouvement observé.

Laplace semble admettre l'hypothèse de Bernoulli (*Mécanique céleste*, t. Ier, chap. VII, § 29, et *Exposition du système du monde*, livre III, chap. V).

NOTE SUR LA QUESTION 350 (WRONSKI)

(voir p. 248);

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

L'énoncé de cette question, tel qu'on le lit à la page 248, n'est peut-être ni très-clair ni très-exact. On pourrait, je pense, le modifier ainsi :

Étant donnée une équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

dont les racines sont $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, *calculer la fonction homogène de degré* p :

$$B_p = \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad (*).$$

Cela posé, la solution de M. Brioschi peut être simplifiée et abrégée de la manière suivante :

La fonction homogène B_p est évidemment le coefficient de z^p dans le produit des n séries

$$1 + x_1 z + x_1^2 z^2 + x_1^3 z^3 + \ldots,$$
$$1 + x_2 z + x_2^2 z^2 + x_2^3 z^3 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 + x_n z + x_n^2 z^2 + x_n^3 z^3 + \ldots$$

D'ailleurs, pourvu que le module de la variable z soit suffisamment petit, ces séries ont pour sommes respectivement

$$\frac{1}{1 - x_1 z}, \quad \frac{1}{1 - x_2 z}, \ldots, \quad \frac{1}{1 - x_n z};$$

(*) Cette fonction B_p est celle que Wronski a désignée par la lettre hébraïque *aleph*.

donc

$$(1)\quad \frac{1}{(1-x_1z)(1-x_2z)\ldots(1-x_nz)} = 1 + B_1 z + \ldots + B_p z^p + \ldots.$$

Mais évidemment

$$(2)\quad (1-x_1z)(1-x_2z)\ldots(1-x_nz) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n;$$

donc

$$(3)\quad 1 = (1 + B_1 z + \ldots + B_p z^p + \ldots)(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n).$$

Cette dernière relation donne d'abord

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = B_1 + a_1, \\ 0 = B_2 + B_1 a_1 + a_2, \\ 0 = B_3 + B_2 a_1 + B_1 a_2 + a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = B_n + B_{n-1} a_1 + B_{n-2} a_2 + \ldots + B_1 a_{n-1} + a_n, \end{array}\right.$$

et, pour toutes les valeurs de p qui surpassent n,

$$(5)\quad 0 = B_p + B_{p-1} a_1 + B_{p-2} a_2 + \ldots + B_{p-n+1} a_{n-1} + B_{p-n} a_n.$$

Ces dernières formules ont été données par Wronski.

RECUEIL DE FORMULES RELATIVES AU CERCLE

(voir page 155);

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur au lycée de Carcassonne.

Multiples de $\sqrt{\pi}$.

$\sqrt{\pi} = 1,77\ 245\ 385\ 090\ 551\ 6 + \ldots$

$2\sqrt{\pi} = 3,54\ 490\ 770\ 181 +$

$3\sqrt{\pi} = 5,31\ 736\ 155\ 272 -$

$4\sqrt{\pi} = 7,08\ 981\ 540\ 362 +$
$5\sqrt{\pi} = 8,86\ 226\ 925\ 453 -$
$6\sqrt{\pi} = 10,63\ 472\ 310\ 543 +$
$7\sqrt{\pi} = 12,40\ 717\ 695\ 634 -$
$8\sqrt{\pi} = 14,17\ 963\ 080\ 724 +$
$9\sqrt{\pi} = 15,95\ 208\ 465\ 815 -$

L'approximation est d'une demi-unité du onzième ordre décimal. Les nombres trop faibles sont suivis du signe +.

Erreur à corriger dans les multiples de $\frac{1}{\pi}$ (p. 155).

Dans $\frac{7}{\pi}$, au lieu du quine 92029, il faut lire 92032.

ÉQUATION D'UNE CONIQUE PASSANT PAR CINQ POINTS DONNÉS.

1. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; x_5, y_5 les coordonnées des cinq points; l'équation de la conique est

$$\begin{aligned}
&[(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - y_1 x_2] \\
\times &[(y_3 - y_4)x - (x_3 - x_4)y + y_4 x_3 - x_4 y_3] \\
\times &[(y_2 - y_3)x_5 - (x_2 - x_3)y_5 + x_2 y_3 - y_2 x_3] \\
\times &[(y_4 - y_1)x_5 - (x_4 - x_1)y_5 + x_4 y_1 - y_4 x_1] \\
= &[(y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2 y_3 - y_2 x_3] \\
\times &[(y_4 - y_1)x - (x_4 - x_1)y + y_1 x_4 - x_1 y_4] \\
\times &[(y_3 - y_4)x_5 - (x_3 - x_4)y_5 + x_3 y_4 - y_3 x_4] \\
\times &[(y_1 - y_2)x_5 - (x_1 - x_2)y_5 + x_1 y_2 - y_1 x_2],
\end{aligned}$$

Il est évident qu'on satisfait à cette équation en remplaçant successivement x et y par les coordonnées des

points; elle ne change pas en permutant mutuellement les indices 1 et 5, 2 et 5, 3 et 5, 4 et 5.

2. Désignons par α et γ les deux facteurs en x, y du membre à gauche; par β et δ les deux facteurs en x, y du membre à droite;

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

sont les équations du côté opposé du quadrilatère inscrit ayant pour sommets les quatre premiers points. Si d'un point quelconque de la conique on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère inscrit, $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ exprime le quotient du rectangle des perpendiculaires abaissées sur les côtés opposés α, γ divisé par le rectangle $\beta\delta$ des perpendiculaires abaissées sur les deux autres côtés, et l'équation montre que ce quotient est constant; c'est le théorème de Newton. Ainsi ce théorème établi, on peut s'en servir pour écrire tout de suite l'équation d'une conique passant par cinq points. On voit donc pourquoi Newton a pris ce théorème pour point de départ et en a déduit toutes les propriétés des coniques en y joignant le procédé métamorphique employé sous le nom d'*homographie* dans ce temps-ci.

3. Si d'un point quelconque de la conique, on mène des droites aux quatre sommets de quadrilatère inscrit, on obtient un faisceau de quatre droites et quatre triangles ayant pour bases les quatre côtés du quadrilatère; dans chaque triangle, la hauteur est égale au rectangle des côtés qui comprennent l'angle opposé à la base, divisé par la base, et le tout multiplié par le sinus de cet angle. Faisant usage de ces valeurs dans le théorème de Newton, on trouve une relation entre les sinus des angles du faisceau et qui constitue la constance du rapport anharmonique du faisceau; propriété qui est

le point de départ des admirables travaux de M. Chasles sur les coniques.

Ainsi les deux théorèmes sont des corollaires l'un de l'autre.

4. Posons

$$A_1 = (y_1 - y_2)(y_3 - y_4), \qquad C_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$
$$A_2 = (y_2 - y_3)(y_4 - y_1), \qquad C_2 = x_2 y_3 - y_2 x_3,$$
$$\alpha_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), \qquad C_3 = x_3 y_4 - y_3 x_4,$$
$$\alpha_2 = (x_2 - x_3)(x_4 - x_1), \qquad C_4 = x_4 y_1 - y_4 x_1,$$
$$B_1 = (y_1 - y_2)(x_3 - x_4),$$
$$B_2 = (y_2 - y_3)(x_4 - x_1),$$
$$\beta_1 = (x_1 - x_2)(y_3 - y_4),$$
$$\beta_2 = (x_2 - x_3)(y_4 - y_1);$$

on aura

$$\begin{aligned}\alpha\gamma = {} & A_1 x^2 - xy(B_1 + \beta_1) + \alpha_1 y^2 \\ & + x[(y_3 - y_4)C_1 - (y_1 - y_2)C_3] \\ & + y[(x_1 - x_2)C_3 - (x_3 - x_4)C_1] - C_1 C_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\delta = {} & A_2 x^2 - xy(B_2 + \beta_2) + \alpha_2 y^2 \\ & + x[(y_4 - y_1)C_2 - (y_2 - y_3)C_4] \\ & + y[(x_2 - x_3)C_4 - (x_4 - x_1)C_2] - C_2 C_4.\end{aligned}$$

Désignant par $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5, \delta_5$ ce que deviennent $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en y remplaçant x, y par x_5, y_5, on a

$$\begin{aligned}\alpha_5\gamma_5 = {} & A_1 x_5^2 - x_5 y_5(B_1 + \beta_1) + \alpha_1 y_5^2 \\ & + x_5[(y_3 - y_4)C_1 - (y_1 - y_2)C_3] \\ & + y_5[(x_1 - x_2)C_3 - (x_3 - x_4)C_4] - C_1 C_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_5\delta_5 = {} & A_2 x_5^2 - x_5 y_5(B_2 + \beta_2) + \alpha_2 y_5^2 \\ & + x_5[(y_4 - y_1)C_2 - (y_2 - y_3)C_4] \\ & + y_5[(x_2 - x_3)C_4 - (x_4 - x_1)C_2] - C_2 C_4,\end{aligned}$$

et l'équation de la conique est

$$\alpha\gamma\beta_5\delta_5 = \beta\delta\alpha_5\gamma_5,$$

$$(y_3 - y_4)C_1 - (y_1 + y_2)C_5$$
$$= y_2 y_3 (x_1 - x_4) + y_3 y_1 (x_4 - x_2)$$
$$+ y_1 y_4 (x_2 - x_3) + y_4 y_2 (x_3 - x_1);$$

de même pour les valeurs analogues.

5. Si l'on prend le point x_5, y_5 pour origine, l équation devient

$$C_2 C_4 \alpha\gamma = C_1 C_3 \beta\delta$$

et prend la forme

$$Mx^2 + Nxy + Py^2 + \ldots = 0,$$

et l'on a, en faisant le calcul,

$$\begin{aligned}N^2 - 4PM = {} & (C_2^2 C_4^2 + C_1^2 C_3^2)\\ & \times [(y_1 - y_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)]^2\\ & - 2 C_1 C_2 C_3 C_4\\ & \times [(y_1 - y_2)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)]\\ & \times [(x_2 - x_3)(y_4 - y_1) + (y_2 - y_3)(x_4 - x_1)],\end{aligned}$$

expression qui donne l'espèce de la courbe.

GÉOMÉTRIE ALGORITHMIQUE.

Sur les polygones inscrits et circonscrits à des coniques;

D'APRÈS M. BRIOSCHI.

Ann. de Tortolini, 1857.

1. *Lemme*. Soient u, v, w trois fonctions linéaires à

deux variables :

$$U = \alpha vw + \beta wu + \gamma uv,$$

$$V = l^2u^2 + m^2v^2 + n^2w^2 - avw - bwu - cuv,$$

$$tU - V = vw(t\alpha + a) + wu(t\beta + b) + uv(t\gamma + c)$$
$$- l^2u^2 - m^2v^2 - n^2w^2,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, a, b, c, \ldots$ sont des constantes données et t une constante arbitraire égalant à zéro les trois dérivées de $tU - V$ prises par rapport à u, v, w; on obtient

$$w(t\beta + b) + v(t\gamma + c) - 2l^2u = 0,$$

$$w(t\alpha + a) - 2vm^2 + (t\gamma + c)u = 0,$$

$$-2n^2w + v(t\alpha + a) + (t\beta + b)u = 0.$$

Pour que ces trois équations subsistent simultanément, il faut que le déterminant soit nul; ce déterminant, qu'on nomme le *discriminant* de la fonction $tU - V$ est

$$a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 = 0,$$

où

$$a_0 = \alpha\beta\gamma,$$

$$a_1 = l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 + a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta,$$

$$a_2 = 2a\alpha l^2 + 2b\beta m^2 + 2c\gamma n^2 + \alpha bc + \beta ca + \gamma ab,$$

$$a_3 = l^2a^2 + m^2b^2 + n^2c^2 + abc - 4l^2m^2n^2.$$

2. L'intersection de la droite $u = 0$, avec la conique $tU - V = 0$, donne

$$m^2v^2 + n^2w^2 - vw(t\alpha + a) = 0.$$

Lorsque cette équation est un carré parfait, la droite $u = 0$ est tangente à la conique, ce qui donne

$$t = \frac{2mn - a}{\alpha}.$$

Désignons cette valeur particulière de t par t_1, nous avons

donc

$$a = 2mn - \alpha t_1.$$

Désignons de même par t_2, t_3 les valeurs particulières de t qui rendent les droites $v = 0$, $w = 0$ tangentes même aux deux coniques $t_2 U - V = 0$, $t_3 U - V = 0$, nous avons les trois équations

$$a = 2mn - \alpha t_1,$$
$$b = 2nl - \beta t_2,$$
$$c = 2lm - \gamma t_3.$$

En posant

$$U = 0,$$

le triangle u, v, w est inscrit dans cette conique et circonscrit aux trois coniques :

$$t_1 U - V = 0,$$
$$t_2 U - V = 0,$$
$$t_3 U - V = 0.$$

3. Substituons ces valeurs de a, b, c dans les coefficients du discriminant, on obtient

$$a_0 = \alpha\beta\gamma,$$
$$a_1 = p^2 - \alpha\beta\gamma(t_1 + t_2 + t_3),$$
$$a_2 = 2pq + \alpha\beta\gamma(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1),$$
$$a_3 = q^2 - \alpha\beta\gamma\, t_1 t_2 t_3,$$

où

$$p = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$
$$q = 4r - l\alpha t_1 - m\beta t_2 - n\gamma t_3,$$
$$r = lmn.$$

Soit

$$(1)\quad (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = t^3 + At^2 + Bt + C = 0;$$

d'après les propriétés d'Albert Girard, on a les rela-

tions

(2) $p^2 = a_1 - a_0 A$, $\quad 2pq = a_2 - a_0 B$, $\quad q^2 = a_3 - a_0 C$;

d'où l'on déduit

$$4(a_1 - a_0 A)(a_3 - a_0 C) = (a_2 - a_0 B)^2,$$

relation qui a été donnée aussi par MM. Cayley et Salmon, mais par d'autres raisonnements.

4. On a, d'après les équations (2),

$$p^2 t^2 + 2pqt + q^2 = (pt + q)^2 = a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$
$$= a_0 (t - t_1) t - t_2) (t - t_3) \ (^*);$$

car cette équation est satisfaite par les trois racines t_1. t_2, t_3, et en développant, on a

$$pt + q = \sqrt{a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3}$$
$$= A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \ldots = F(t),$$

ce qui donne

$$A_0^2 = a_3,$$
$$2A_0 A_1 = a_2,$$
$$A_1^2 + 2A_1 A_2 = a_1,$$
$$A_1^3 + 2A_1 A_2 + 2A_0 A_3 = a_0 \ldots,$$
$$pt_1 + q = A_0 + A_1 t_1 + A_2 t_1^2 + A_3 t_1^3 \ldots,$$
$$pt_2 + q = A_0 + A_1 t_2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_2^3 \ldots,$$
$$p = A_1 + A_2 (t_2 - t_1) + A_3 (t_2^2 - t_1 t_2 + t_1^2) \ldots,$$
$$q = A_0 - t_1 t_2 P,$$

ou

$$P = A_2 + A_3 (t_1 + t_2) + A_4 (t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2) + \ldots$$

La troisième des équations (2) donne

$$q^2 = a_3 - a_0 t_1 t_2 t_3 = A_0^2 - 2 A_0 t_1 t_2 P + t_1^2 t_2^2 P^2;$$
$$a_0 b_1 t_2 = a_0 (A_0 - q),$$

(*) Il suffit de remplacer dans l'équation $t^3 + At^2 + Bt + C = 0$, A, B, C par les valeurs en p, q, a_0, etc. TM.

donc

$$t_3 = \frac{a_3 - q^2}{a_0 t_1 t_2},$$

d'où

$$t_3 = \frac{1}{a_0}(t_1 t_2 P^2 - 2A_0 P).$$

Si l'on pose $t_1 = t_2 = 0$, ou si $a = 2mn$, $b = 2nl$; alors les droites $u = 0$, $v = 0$ inscrites dans $U = 0$ sont tangentes à $V = 0$ et à la conique $t_3 U - V = 0$; or alors

(3) $$t_3 = -\frac{2A_0 A_2}{a_0} = \frac{a_2^2 - 4a_1 a_3}{4a_0 a_3}.$$

Le troisième côté $w = 0$ est donc tangent à la conique $(a_2^2 - 4a_1 a_3)U - 4a_0 a_3 V = 0$, et si $a_2^2 = 4a_1 a_3$, le triangle u, v, w sera à la fois inscrit à la conique $U = 0$ et circonscrit à la conique $V = 0$, et lorsque les trois conditions $a = 2mn$, $b = 2nl$, $a_2^2 = 4a_1 a_3$ subsistent, un triangle circonscrit à V ayant deux côtés inscrits dans U et circonscrit à V aura de même le troisième côté.

5. Soit seulement

$$t_1 = 0;$$

alors

$$P = A_2 + A_3 t_2 + A_4 t_2^2 + \dots,$$

$u = 0$ est tangent à la conique $V = 0$, et

$$a_0 t_3 = -2A_0(A_2 + A_3 t_2 + A_4 t_2^2 + \dots),$$

$$a_0 t_2^2 t_3 = -2A_0(A_2 t_2^2 + A_3{}_2^2 + A_4 t_2^4 + \dots)$$

$$= -2A_0[A_0 + A_1 t_2 - (A_0 + A_1 t^2 + A_2 t_2^2 + \dots)]$$

$$= -2A_0[A_0 + A_1 t_2 - F(t_2)]$$ (*voir* p. 424),

$$a_0 t_2^2 t_3 - 2A_0(A_0 + A_1 t_2) = -2A_0 F(t_2);$$

élevant au carré

$$a_0^2 t_2^4 t_3^2 - 4a_0 A_0 t_2^2 t_3 (A_0 + A_1 t_2)$$
$$= 4A_0^2 \{[F(t_2)]^2 - (A_0 + A_1 t_2)^2\},$$

mais

$$2A_0A_1 = a_2, \qquad A_1^2 = \frac{a_2^2}{4a_3},$$

d'où

$$F(t_2)^2 - (A_0 + A_1 t_2)^2 = \frac{t_2^2}{4a_3}(4a_0a_3t_2 + 4a_1a_3 - a_2^2).$$

Substituant et réduisant, on obtient

(4) $a_0^2 t_2^2 t_3^2 - 4a_0a_3t_3 - 2a_0a_2t_2t_3 = 4a_0a_3t_2 + 4a_1a_3 - a_2^2,$

si l'on avait aussi

$$t_2 = 0,$$

on retombe sur la valeur de t_3 trouvée ci-desus (3).

6. Soit le quadrilatère *abcd* inscrit dans la conique $U = 0$, et dont trois côtés *ab*, *bc*, *cd* sont circonscrits à la conique $V = 0$.

Dans le triangle *abc*, les côtés *ab*, *bc* sont tangents à la conique $V = 0$ et inscrits dans la conique $U = 0$. Donc, d'après ce qui précède, le troisième côté *ac* sera tangent à la conique $\alpha U - V = 0$, ou

$$(3) \qquad \alpha = \frac{a_2^2 - 4a_1a_3}{4a_0a_3}.$$

Dans le triangle *acd*, le côté *cd* est tangent à la conique $U = 0$, le côté *ac* tangent à la conique $\alpha U - V = 0$, le troisième côté *ad* sera tangent à la conique $t_3 U - V = 0$, si l'on a la relation (4), dans laquelle il faut remplacer t_2 par la valeur de α, et l'on obtient

$$t_3 = \frac{16a_3(8a_0a_3^2 + a_2^3 - 4a_1a_2a_3)}{(a_2^2 - 4a_1a_3)^2}.$$

Ainsi le quatrième coté sera tangent à la conique

$$16a_3(8a_0a_3^2 + a_2^3 + 4a_1a_2a_3)U - (a_2^2 - 4a_1a_3)^2 V = 0,$$

et si l'on a

$$8a_0a_3^2 + a_2^3 - 4a_1a_2a_3 = 0,$$

le quadrilatère sera à la fois inscrit dans U = o et circonscrit à V = o. Même observation que ci-dessus.

7. Soit le pentagone $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ inscrit dans la conique U = o, et supposons que les côtés $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\alpha_5$ soient tangents à la conique V = o, le côté $\alpha_5\alpha_1$ sera tangent à la conique t_5U — V = o. Il s'agit de trouver t_5.

Dans le triangle $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$, le côté $\alpha_3\alpha_4$ est tangent à V, on a donc entre t_3 et t_4 la relation (4)

$$a_0^2t_3^2t_4^2 - 4a_0a_3t_4 - 2a_0a_2t_3t_4 = 4a_0a_3t_3 + 4a_1a_3 - a_2^2.$$

Dans le triangle $\alpha_1\alpha_4\alpha_5$, le côté $\alpha_4\alpha_5$ est tangent à la conique V = o, on a donc encore

$$a_0^2t_4^2t_5^2 - 4a_0a_3t_5 - 2a_0a_2t_4t_5 = 4a_0a_3t_4 + 4a_1a_3 - a_2^2.$$

Soustrayant on a

$$a_0^2t_4^2(t_5 + t_3) = 4a_0a_3 + 2a_0a_2t_4.$$

La première des équations donne

$$a_0^2t_5t_4^2t_3 = a_2^2 - 4a_1a_3 - 4a_0a_3t_4,$$

d'où

$$t_5 = \frac{4a_0a_2(\alpha - t_4)}{a_0^2t_3t_4^2}.$$

On connaît t_3 et t_4, par conséquent t_5, et de même pour les polygones de tout nombre de côtés.

Observation. Ce magnifique travail est, à ce que je sache, la démonstration analytique la plus simple qu'on ait donnée du célèbre théorème de M. Poncelet; généralisation du théorème pour deux cercles, auquel le théorème général peut être ramené, puisque, d'après un autre

théorème de M. Poncelet, deux coniques sont les perspectives de deux cercles. La précédente analyse résout cette question : un polygone de n côtés étant inscrit dans une conique; $n-1$ des côtés étant respectivement des tangentes à un faisceau de $n-1$ coniques passant par les mêmes quatre points, trouver la $n^{ième}$ conique du faisceau qui soit touchée par le $n^{ième}$ côté du polygone; or l'on peut trouver les conditions pour que le faisceau de n coniques se condense en une seule conique, l'on a donc le problème Poncelet. Jacobi a rattaché cette recherche aux fonctions elliptiques (*Nouvelles Annales*, t. IV, p. 377).

SOLUTION DE LA QUESTION 396

(voir p. 390);

PAR M. L. DE COINCY,
Élève du lycée Bonaparte (classe de M. Bouquet),
ET M. E. CARÉNON,
Elève du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

Je désigne par α l'angle donné BAC et par φ l'angle cherché BAC'.

La condition à remplir est

$$AB'.BB' = AC'.CC'$$

ou

$$c^2 \sin\varphi \cos\varphi = b^2 \sin(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi),$$

$$c^2 \sin 2\varphi = b^2 \sin 2(\alpha-\varphi),$$

et posant $2\psi=\varphi$, $2\alpha=\beta$,

$$\frac{\sin\psi}{\sin(\beta-\psi)}=\frac{b^2}{c^2}.$$

Développant et divisant par $\cos\psi$,

$$\tang\psi = \frac{b^2 \sin\beta}{c^2 + b^2\cos\beta} \;(*).$$

On a ainsi pour la valeur de l'angle ψ deux valeurs ψ, $180 + \psi$, et, par suite, pour φ deux directions rectangulaires.

1°. Si $\alpha = 90$ degrés, ce sont les côtés eux-mêmes qui satisfont à la question en général.

2°. Lorsque $b = c$, on a

$$\tang\psi = \frac{c^2 \sin\beta}{c^2(1 + \cos\beta)} = \tang\frac{\beta}{2},$$

d'où

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

3°. Si les côtés étaient $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ avec $\alpha\sqrt{-1}$ pour angle compris, on aurait

$$\tang\psi = \frac{b^2\sin(\beta\sqrt{-1})}{c^2 + b^2\cos(\beta\sqrt{-1})} = \frac{b^2 \sin\beta i}{c^2 + b^2\cos\beta i},$$

c'est-à-dire que la relation entre y et α ne changerait pas.

Remarque. Sin βi est réel, ainsi que $\cos^2\beta i$.

Note du Rédacteur. Incessamment une solution de M. Chaillot (de Versailles) avec une belle construction, et une solution d'une admirable simplicité par M. Landais (lycée Louis-le-Grand).

(*) Ce qui suit est de M. de Coincy.

SECONDE SOLUTION D'UNE QUESTION

Proposée aux examens d'admission à l'École Polytechnique

(voir page 376);

PAR M. MARCEL JOZON,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = A \sin x + B$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B, et effectuer la séparation de toutes ces racines.

Application à l'équation $x = 3142 \sin x + 157$.

La valeur maximum de $\sin x$ étant 1, la valeur maximum de $A \sin x + B$ est $A + B$; de même la valeur minimum de ce binôme correspond à $\sin x = -1$ et est $-A + B$. (A est supposé positif. S'il ne l'était pas, on changerait les signes.) Il résulte de là : 1° que toutes les valeurs de x satisfaisant à l'équation sont comprises entre $-A + B$ et $+A + B$; 2° que le nombre des racines est impair, car pour toute valeur de x inférieure à $-A+B$, le premier membre de l'équation

$$x - A \sin x - B = 0$$

devient négatif, et, pour toute valeur de x supérieure à $A + B$, le premier membre de cette même équation devient positif.

On voit de plus que si deux valeurs x_1 et $x_1 + \pi$ comprises entre $-A + B$ et $+A + B$ sont telles que

$$\sin x_1 = \pm 1,$$

elles donnent des résultats de signes contraires (*) lorsqu'on les substitue à x dans le premier membre de l'équation

$$x - A \sin x - B = 0,$$

et que par conséquent elles comprennent une racine. De plus, dans cet intervalle de x_1 à $x_1 + \pi$, la dérivée $1 - A \cos x$ s'annule au plus une fois; il n'y a donc qu'une seule racine comprise entre x_1 et $x_1 + \pi$ (**).

Donc si l'on a la fois

$$\sin(-A + B) = \pm 1$$

et

$$\sin(A + B) = \pm 1 \text{ (***)}$$

il y aura autant de racines comprises entre $-A + B$ et $A + B$, qu'il y a de demi-circonférences dans la différence $2A$ de ces arcs.

Si $-A + B$ et $A + B$ ne vérifient l'équation ni l'un ni l'autre, le nombre des racines sera exactement $\frac{2A}{\pi}$.

Si $-A + B$ est racine, $A + B$ ne l'étant pas, le nombre des solutions est $\frac{2A}{\pi} + 1$. Enfin ce nombre est $\frac{2A}{2} + 2$, quand $-A + B$ et $+A + B$ sont racines.

Pour ramener le cas général à celui-là, on pose

$$-A + B = \frac{2n + 1}{2}\pi - \alpha = C - \alpha,$$

la nombre α étant plus petit que π, et de même

$$A + B = \frac{2n' + 1}{2}\pi + \beta = D + \beta.$$

(*) Car $\sin(x_1 + \pi) = -\sin x_1$. Tm.

(**) Car cette quantité ne peut dans cet intervalle passer du positif au négatif qu'une seule fois. Tm.

(***) Cela revient à $\sin x_1 = \pm 1$. Tm.

Le nombre des racines comprises entre C et D est $\left(\frac{D-C}{\pi}\right)$.

Maintenant si $\sin C = +1$, il y a une racine comprise entre $C-\alpha$ et C, car pour $x = C-\alpha$, $x - A \sin x - D$ devient négatif, et pour $x = C$ il est positif.

Si au contraire $\sin C = -1$, il n'y a pas de solutions comprises entre $C-\alpha$ et C.

On verrait de même que si $\sin D = -1$, il y a une racine comprise entre D et $D+\beta$, et que si $\sin D = +1$, il n'y en a pas. Le nombre des racines peut donc être

$$\frac{D-C}{\pi},\quad \frac{D-C}{\pi}+1 \quad \text{ou} \quad \frac{D-C}{\pi}+2.$$

On a donc ainsi le nombre des racines. Quant à leur séparation, elle se trouve naturellement effectuée, puisque l'on sait qu'entre deux arcs $\frac{2n-1}{2}\pi$ et $\frac{2n+1}{2}\pi$ compris entre les limites extrêmes $-A+B$ et $A+B$, il y a une racine de l'équation et une seule.

Application à l'équation $x = 3142 \sin x + 157$.

Ici

$$A = 3142 = 1000\pi, \quad B = 157 = 50\pi;$$

donc

$$-A+B = -950\pi = \left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{2}$$

et

$$A+B = 1050\pi = \left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Il y aura donc déjà $1050-\frac{1}{2}+950-\frac{1}{2}$ ou 1999 racines comprises entre $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$ et $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$.

De plus, le sinus de $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$ étant positif, il y a une racine entre -950π et $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$, et de même, le sinus de $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$ étant négatif, il y a une racine comprise entre $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$ et 1050π.

Il y aura donc en tout $1999+2$ ou 2001 racines, connues à une demi-circonférence près, à l'exception de la première et de la dernière qui sont connues à un quart de circonférence près.

Note du Rédacteur. La première solution (p. 376) est usitée dans les services publics, lorsqu'on n'a besoin de connaître approximativement que quelques racines; le procédé graphique est alors plus expéditif que le calcul.

QUESTION D'EXAMEN

(voir, p. 110);

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur à Carcassonne.

On demande les deux intersections de deux paraboles dont on connaît les directrices et les foyers.

Question incomplète : il faut ajouter que les deux paraboles ont le même axe.

Les paramètres et les sommets se construiront facilement. Je les désigne par $2p$, $2p'$, A, A'. Soit M l'une des intersections cherchées, MP l'ordonnée de M,

$$\overline{MP}^2 = 2p\,\overline{AP},\quad \overline{MP}^2 = 2p'\,\overline{A'P}.$$

La question se ramène à deux constructions connues :

1°. Trouver sur la droite AA′ un point P tel, que $\frac{AP}{A'P} = \frac{p'}{p}$.

2°. Construire une moyenne géométrique entre $2p$ et $\overline{AP}$.

La première construction donne deux points P dont l'un est à rejeter. Il peut n'y avoir aucune solution; il y a plusieurs vérifications simples.

SOLUTION DE LA QUESTION 382

(voir p. 181);

PAR M. BLERZY MERRY,
Inspecteur des lignes télégraphiques à Blidah.

Un nombre m décomposé en facteurs premiers est de la forme

$$m = A^a B^b \ldots F^f G^g H^h \ldots L^l,$$

et la forme générale d'un de ses diviseurs est

$$d = A^{a'} B^{b'} \ldots F^{f'} G^{g'} H^{h'} \ldots L^{l'}.$$

Soit q le nombre des facteurs premiers de m qui n'entrent pas dans d à la même puissance que dans m. Il est évident que

d divise m, $\frac{M}{G}, \frac{m}{H}, \ldots, \frac{m}{L}$	et ne divise pas $\frac{m}{A}, \frac{m}{B}, \ldots, \frac{m}{F}$,
$\frac{m}{GH}, \ldots, \frac{m}{GL}$	$\frac{m}{AB}, \frac{m}{AL}, \ldots, \frac{m}{BL}$,
....	....

et que, par conséquent, si

$$\sum f(d) = F(m),$$

$f(d)$ est contenu

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{fois dans} & F(m), \\ q & \text{»} & \sum F\left(\frac{m}{A}\right), \\ \frac{q(q-1)}{1.2} & \text{»} & \sum F\left(\frac{m}{AB}\right), \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Dans la somme

$$F(m) - \sum F\left(\frac{m}{A}\right) + \sum F\left(\frac{m}{AB}\right) \ldots$$

le coefficient $f(d)$ est

$$1 - q + \frac{q(q-1)}{1.2} \ldots.$$

Si q est différent de zéro, ce coefficient est nul; si $q = 0$, alors $d = m$, et ce coefficient devient égal à l'unité; donc la somme ci-dessus se réduit à $f(m)$.

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 370

(voir p. 127);

PAR M. BLERZY MERRY,
Inspecteur des lignes télégraphiques à Blidah.

Soit

$$P + Q\sqrt{-1}$$

la valeur du déterminant, P et Q étant des quantités réelles.

En remplaçant $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$, cette valeur devient

$$P - Q\sqrt{-1};$$

mais le déterminant ne change pas, car cette substitution revient à prendre les lignes pour colonnes et réciproquement ; donc

$$P + Q\sqrt{-1} = P - Q\sqrt{-1}$$

d'où

$$Q = 0.$$

DÉMONSTRATION

D'une Proposition relative au calcul numérique des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quand a est très-petit. (Programme officiel.)

Dans une première Note sur cette question du Programme officiel, j'ai énoncé (page 158) la proposition suivante :

Lorsque l'équation considérée

$$ax^3 + bx - c = 0$$

a des racines de signes contraires, pour que la méthode des approximations successives donne des valeurs de plus en plus approchées de la racine positive de cette équation, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}.$$

Je vais démontrer cette proposition.

Dans l'équation *numérique*

$$ax^2 + bx - c = 0,$$

les lettres a, b, c représentent des nombres *positifs*; la racine positive a pour expression

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a};$$

je nommerai x' la valeur exacte de cette racine.

L'application de la méthode des approximations successives à l'équation numérique considérée consiste en un calcul que je rappelle ici.

L'équation

$$ax^2 + bx - c = 0$$

donne

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2.$$

En négligeant d'abord le terme $\frac{a}{b}x'^2$, on a, pour première valeur approchée de x', le nombre $\frac{c}{b}$, que je désignerai par x_1.

En remplaçant x' par le nombre x_1 dans la formule $\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2$, on a, pour seconde valeur approchée de x', le nombre $\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_1^2$; je le désignerai par x_2.

De même, si l'on substitue la seconde valeur approchée x_2 à x' dans la formule $\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2$, il en résultera une troisième valeur approchée x_3, et ainsi de suite.

On a donc les égalités numériques

$$x_1=\frac{c}{b},$$

$$x_2=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_1^2,$$

$$x_3=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_2^2,$$

$$x_4=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_3^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{2n+1}=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_{2n}^2.$$

Cela posé, cherchons quelle condition doit être remplie par les coefficients a, b, c pour que x_2 approche plus de x' que x_1.

Les relations

$$x_1=\frac{c}{b},\quad x'=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x'^2$$

montrent que x_1 surpasse x', et comme x_1 et x' sont des nombres positifs, l'inégalité

$$x_1>x'$$

donne

$$x_1^2>x'^2,$$

et, par suite,

$$\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\ {}_1^2<\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x'^2 \quad \text{ou} \quad x_2<x'.$$

Ainsi, les erreurs commises en prenant pour x', les valeurs approchées x_1, x_2 sont exprimées par les différences

$$x_1-x',\quad x'-x_2,$$

et, par conséquent, il faut que l'inégalité

$$x'-x_2<x_1-x'$$

ait lieu pour que la seconde valeur x_2 soit plus approchée de x' que la première x_1.

Mais les relations

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2, \quad x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_1^2$$

donnant

$$x' - x_2 = \frac{a}{b}(x_1^2 - x'^2) = \frac{a}{b}(x_1 + x')(x_1 - x'),$$

l'inégalité

$$x' - x_2 < x_1 - x'$$

se transforme en celle-ci :

$$\frac{a}{b}(x_1 + x')(x_1 - x') < x_1 - x',$$

et se réduit à

(1) $$\frac{a}{b}(x_1 + x') < 1,$$

parce que $x_1 - x'$ est un nombre positif.

D'ailleurs

$$x_1 + x' = \frac{c}{b} + \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}\right)$$
$$= \frac{2ac - b^2 + b\sqrt{b^2 + 4ac}}{2ab}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{a}{b}(x_1 + x') = \frac{2ac - b^2 + b\sqrt{b^2 + 4ac}}{2b^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2ac}{b^2} - 1 + \sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2}}\right),$$

ou, en nommant n le rapport $\frac{ac}{b^2}$,

$$\frac{a}{b}(x_1 + x') = \frac{2n - 1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}.$$

Donc l'inégalité (1)

$$\frac{a}{b}(x_1 + x') < 1$$

revient à

$$\frac{2n - 1 + \sqrt{1 + 4n}}{2} < 1;$$

d'où

$$\sqrt{1 + 4n} < 3 - 2n.$$

Ce qui exige que $3 - 2n$ soit positif, c'est-à-dire qu'on ait

$$n < \frac{3}{2}.$$

En admettant que cette première condition soit remplie, on pourra élever au carré les deux membres de l'inégalité

$$\sqrt{1 + 4n} < 3 - 2n,$$

et il en résultera successivement

$$1 + 4n < 9 - 12n + 4n^2,$$

$$4n^2 - 16n + 8 > 0,$$

$$n^2 - 4n + 2 > 0,$$

$$(n - 2 - \sqrt{2})(n - 2 + \sqrt{2}) > 0.$$

Or, $n < \frac{3}{2}$ donne

$$n - 2 - \sqrt{2} < 0,$$

il faut donc qu'on ait

$$n - 2 + \sqrt{2} < 0;$$

d'où

$$n < 2 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}.$$

De ce qui précède on peut conclure que l'inégalité

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que x_2 soit une valeur plus approchée de x' que x_1.

Car, en supposant que les nombres a, b, c satisfassent à la condition

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad n < 2 - \sqrt{2},$$

on aura

$$n < 2 + \sqrt{2};$$

d'où

$$(n - 2 - \sqrt{2})(n - 2 + \sqrt{2}) > 0.$$

Et il s'ensuivra

(1) $$\frac{a}{b}(x_1 + x') < 1; \quad x' - x_2 < x_1 - x'.$$

Il reste à faire voir que si l'inégalité

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

existe, tous les nombres x_1, x_2, x_3, x_4, etc., convergeront vers x'.

Remarquons d'abord que les termes de rangs impairs x_1, x_3, x_5,... auront des valeurs plus grandes que x' et décroissantes, et que les termes de rangs pairs x_2, x_4, x_6,... auront des valeurs croissantes moindres que x'.

En effet, quels que soient a, b, c, on a

$$x_1 > x' \quad \text{et} \quad x_2 < x'.$$

En outre, si $\frac{ac}{b^2}$ est moindre que $2 - \sqrt{2}$, le nombre x_2

sera nécessairement positif. Car, en substituant $\frac{c}{b}$ à x_1 dans l'égalité

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_1^2,$$

il vient

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c}{b}\left(1 - \frac{ac}{b^2}\right).$$

Le facteur $1 - \frac{ac}{b^2}$ est positif, puisqu'on suppose

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2};$$

on a donc

$$x_2 > 0.$$

Alors de l'inégalité

$$x_2 < x'$$

on peut conclure

$$x_2^2 < x'^2,$$

et il en résulte

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_2^2 > \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2 \quad \text{ou} \quad x_3 > x'.$$

On a d'ailleurs évidemment

$$x_3 < x_1.$$

L'inégalité

$$x_3 < x_1$$

donne

$$x_3^2 < x_1^2,$$

parce que x_3 et x_1 sont positifs; d'où

$$x_4 > x_2 > 0;$$

et de

$$x_3 > x'$$

on conclura

$$x_4 < x',$$

et ainsi de suite.

On voit donc que les valeurs de x_1, x_3, x_5, etc., sont plus grandes que x' et décroissent, et que les valeurs de $x_2, x_4, x_6, \ldots$ croissent en restant moindres que x'. Ainsi, de tous les termes de la suite x_1, x_2, $x_3, \ldots$, le plus grand est x_1.

Il est maintenant facile de reconnaître qu'un terme quelconque x_{2n+1} a une valeur plus approchée de x' que le terme précédent x_{2n}, c'est-à-dire que

$$x_{2n+1} - x' < x' - x_{2n};$$

car

$$x_{2n+1} - x' = \frac{a}{b}(x'^2 - x_{2n}^2) = \frac{a}{b}(x' + x_{2n})(x' - x_{2n}).$$

Mais on vient de voir que x_{2n} est moindre que x_1; donc

$$\frac{a}{b}(x' + x_{2n}) < \frac{a}{b}(x' + x_1).$$

D'ailleurs l'inégalité supposée

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

donne

$$\frac{a}{b}(x' + x_1) < 1;$$

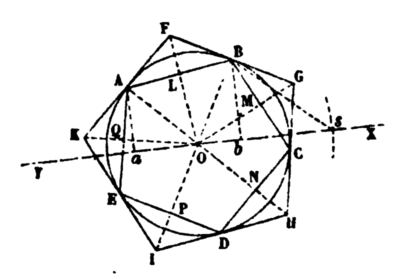
par conséquent, on a

$$x_{2n+1} - x' < x' - x_{2n}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. G.

NOTE SUR UNE PROPOSITION DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

THÉORÈME. *La somme algébrique des perpendiculaires abaissées des sommets d'un polygone régulier* ABCDE *sur une droite* XY *menée par le centre* O *du polygone est nulle, quelle que soit la direction de la droite.*



Lorsque le nombre des côtés du polygone est pair, les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur une droite quelconque passant par le centre sont deux à deux égales et de signes contraires, il est alors évident que leur somme est nulle. Il n'y a donc lieu à démonstration que dans le cas où le nombre des côtés est impair. Toutefois, la démonstration suivante s'applique indistinctement aux deux cas.

Par les sommets A, B, C, D, E je mène des tangentes à la circonférence circonscrite au polygone considéré. Cette construction détermine un nouveau polygone régulier FGHIK semblable au premier et circonscrit au cercle dont le rayon est OA. Ensuite, je conduis les droites OF, OG, OH, OI, OK qui passent par les milieux L, M, N, P, Q des côtés du polygone inscrit. Puis je nomme :

s la somme des perpendiculaires abaissées sur la droite XY des sommets du polygone inscrit ;

s' la somme des perpendiculaires abaissées sur XY des sommets du polygone circonscrit;

s'' la somme des perpendiculaires menées à la même droite par les points L, M, N, P, Q.

Comme les sommets du polygone ABCDE sont les milieux des côtés du polygone FGHIK, on aura

$$s = s',$$

et de même

$$s'' = s,$$

puisque les points L, M, N, P, Q sont les milieux des côtés du polygone ABCDE.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître qu'en désignant par α le rapport des lignes OF, OL, on aura aussi

$$s' = s'' \times \alpha.$$

Car le rapport des perpendiculaires abaissées des points F et L sur XY sera égal à α. Et le même rapport existera entre les perpendiculaires menées par les points G, M, puisque

$$\frac{OG}{OM} = \frac{OF}{OL} = \alpha.$$

Et ainsi de suite. Donc

$$s' = s''.\alpha.$$

Si maintenant on substitue s à s' et à s'' dans l'égalité

$$s' = s''.\alpha,$$

il viendra

$$s = s.\alpha,$$

d'où

$$(\alpha - 1)s = 0.$$

Mais $\alpha - 1$ n'est pas nul, donc

$$s = 0.$$

La proposition est ainsi démontrée, quel que soit le nombre des sommets du polygone considéré.

COROLLAIRE I. *La somme algébrique des projections des rayons* OA, OB,..., OE *sur un axe rectiligne* XY *passant par le centre* O *est nulle*; car ces projections sont précisément égales aux perpendiculaires abaissées des points A, B,..., E sur un second axe rectiligne mené par le centre et perpendiculaire au premier XY.

COROLLAIRE II. *Si l'on décrit avec un rayon quelconque une circonférence ayant le même centre que le polygone régulier, la somme des carrés des distances des sommets du polygone à un point quelconque de cette circonférence sera une quantité constante.*

En effet, nommons r le rayon OA du polygone; n le nombre de ses côtés; r' le rayon de la circonférence décrite; S un point quelconque de cette circonférence. Et concevons que des différents sommets du polygone on ait mené des droites au point S, et qu'on ait projeté sur l'axe OS les rayons OA, OB, etc. En désignant par Oa, Ob,... ces projections, les triangles OAS, OBS, etc., donneront

$$\overline{AS}^2 = r^2 + r'^2 \pm 2r'.Oa, \quad \overline{BS}^2 = r^2 + r'^2 \pm 2r'.Ob, \ldots,$$

ou plus simplement

$$\overline{AS}^2 = r^2 + r'^2 + 2r'.Oa, \quad \overline{BS}^2 = r^2 + r'^2 + 2r'.Ob, \ldots,$$

en convenant de considérer les projections Oa, Ob, etc., comme positives ou négatives suivant qu'elles seront dirigées en sens contraire de OS ou dans le même sens que OS.

Si l'on additionne toutes ces égalités, dont le nombre est n, en ayant égard à ce que la somme algébrique des projections OA, OB, etc., est nulle (corollaire I), on aura

$$\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \ldots = n(r^2 + r'^2).$$

Cette dernière égalité montre que la somme des carrés des distances des sommets A, B, etc., au point S, est indépendante de la position de ce point sur la circonférence décrite. G.

SOLUTION DE LA QUESTION 394

(voir page 312);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Licencié ès Sciences, Professeur à Paris.

Soient

$$m_1,\quad m_2,\quad m_3,\quad m_4$$

les coefficients angulaires de quatre diamètres formant le premier faisceau, et

$$\mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\quad \mu_4$$

les coefficients angulaires respectifs des quatre diamètres conjugués formant le second faisceau. Ces huit coefficients sont tels, que l'on a

$$m_1 \mu_1 = m_2 \mu_2 = m_3 \mu_3 = m_4 \mu_4 = \mp \frac{b^2}{a^2}:$$

le signe supérieur se rapporte à l'ellipse et le signe inférieur à l'hyperbole, a et b sont les demi-axes de la conique considérée.

On sait que le rapport anharmonique de quatre droites concourantes en un même point est égal au rapport anharmonique des quatre points qu'une transversale quelconque détermine sur ces quatre droites. On sait aussi que ce dernier rapport est le même que le rapport anharmonique des projections de ces quatre points sur une droite quelconque, sur l'axe des x par exemple.

Cela posé, l'équation d'une transversale étant représentée par

$$y = px + q,$$

désignons par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

les abscisses des points d'intersection qu'elle détermine sur les droites du premier faisceau. On a

$$x_1 = \frac{q}{m_1 - p}, \quad x_2 = \frac{q}{m_2 - p}, \quad x_3 = \frac{q}{m_3 - p}, \quad x_4 = \frac{q}{m_4 - p}.$$

Le rapport anharmonique du premier faisceau est égal à

$$\frac{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}.$$

Remplaçons x_1, x_2, x_3, x_4 par leurs valeurs, ce qui donne

$$\frac{(m_4 - m_1)(m_2 - m_3)}{(m_4 - m_3)(m_2 - m_1)}.$$

D'après la symétrie des calculs, on voit que le rapport anharmonique du second faisceau est égal à

$$\frac{(\mu_4 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)}{(\mu_4 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_1)}.$$

Si l'on remplace dans ce rapport μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 par leurs valeurs en fonction de m_1, m_2, m_3, m_4, on reconnaît après quelques simplifications que le rapport anharmonique du premier faisceau est égal au rapport anharmonique du second. C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. Ce théorème est un corollaire de ce théorème : Soient une conique et un faisceau ; chaque rayon du faisceau coupe la conique en deux points ; le faisceau qui passe par ces points d'intersection et qui a pour sommet un point quelconque de la conique est un faisceau en *involution*. Les rayons qui passent par les deux points d'intersection d'un même rayon du premier faisceau avec la conique sont des rayons *correspondants*. M. de Jonquières fait mention de ce théorème, mais pour les diamètres conjugués seulement. On en déduit intuitivement le théorème général.

SOLUTION DE LA QUESTION 397

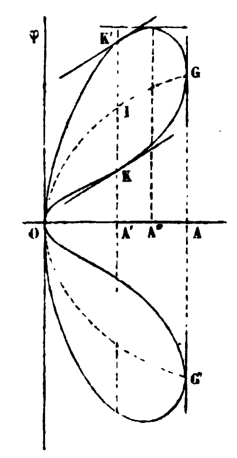
(voir page 390).

PAR M. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Discuter la courbe du quatrième degré donnée par l'équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}.$$

On remarque d'abord que si l'on prend une longueur $OA = a$ dans le sens des x positifs, et qu'on mène par le



point A une parallèle à l'axe des y, la courbe est tout entière comprise entre ces deux parallèles. De plus la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, car en rétablissant le double signe devant chaque radical, les valeurs de y correspondantes à une même abscisse sont deux à deux égales et de signes contraires,

$$y = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt{x(a - x)}.$$

Je discute donc la partie de courbe située au-dessus de l'axe des x

$$y = \sqrt{ax} \pm \sqrt{a(a-x)}.$$

La parabole $y = \sqrt{ax}$ est une courbe diamétrale pour des cordes parallèles aux y. Or, si je prends à partir du point A une longueur AG égale au paramètre a, la parabole passera en G; en appelant φ la longueur qu'il faut porter en dessus et en dessous à partir de la parabole, on a $\varphi = 0$ pour $x = a$ (*).

Donc le point G est un point de la courbe. De même pour $x = 0$, on a $\varphi = 0$, et comme entre $x = 0$ et $x = a$ φ reste positif, il passe par un maximum, qui s'obtient en égalant les deux facteurs sous le radical, puisque leur somme est constante.

Si donc, au milieu A' de OA, j'élève une perpendiculaire à l'axe des x, et qu'à partir du point I, où elle coupe la courbe, je porte deux longueurs IK' et IK égales à OA' ou a, j'aurai les deux points de la courbe pour lesquels φ atteint son maximum. A partir de là, et x croissant jusqu'à a, L diminue jusqu'à 0, il est donc facile de construire approximativement la courbe.

Occupons-nous maintenant des tangentes.

Le coefficient angulaire donné par la formule

$$\tang \alpha = \varphi'(x)$$

est ici

$$\tang \alpha = \frac{a}{2\sqrt{ax}} \pm \frac{a-2x}{2\sqrt{a(a-x)}}.$$

Pour $x = 0$ et $x = a$, $\tang a' = \infty$, ce qui prouve que les tangentes à l'origine et au point G sont l'axe des y, et sa parallèle menée par le point A.

(*) $y = \sqrt{a(a-x)}$ représente un cercle. Tm.

Si je fais

$$x = \frac{a}{2},$$

je trouve

$$\tang \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc les tangentes aux points K et K′ sont parallèles, et la tangente de leur angle avec l'axe des x est donnée par la formule précédente. Il est donc facile de les construire.

On peut se proposer de chercher le point de la courbe pour lequel la tangente est parallèle à l'axe des x. Il suffit pour cela d'annuler $\tang \alpha$, et on trouvera en même temps la valeur de x pour laquelle l'ordonnée correspondante est maximum.

Posons donc

$$\tang \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\sqrt{ax}} = \frac{a - 2x}{\sqrt{ax - x^2}}$$

ou, en réduisant au même dénominateur et simplifiant,

$$x = \frac{3a}{4},$$

et la valeur correspondante de φ est $\frac{a}{4}\sqrt{3}$.

On prendra donc

$$OA'' = \frac{3}{4}a,$$

on élèvera par le point A″ une perpendiculaire à l'axe des x, et, à partir du point où cette perpendiculaire coupera la parabole, on portera une longueur $= \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

La tangente au point S est parallèle à l'axe des x.

Si l'on considère la branche de courbe OKG, il est fa-

cile de voir que tang α reste toujours positif : il doit passer par un minimum entre $x = 0$ et $x = a$.

Ce minimum correspond à un point d'inflexion, et on l'obtiendrait en égalant à zéro la dérivée de tangα.

On peut vérifier quelques-uns des résultats précédents par une autre méthode.

Si nous coupons la courbe par des parallèles représentées en général par

$$y = h,$$

les abscisses des points d'intersection nous seront données par l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 2h^2x^2 - 4h^2ax + h^2 = 0.$$

Dans cette équation il manque un terme entre deux de même signe, ce qui nous permet d'affirmer l'existence de deux racines imaginaires. Une parallèle à l'axe des x ne coupera donc jamais la courbe plus de deux fois.

On voit aussi qu'il est des valeurs de h pour lesquelles elle ne la coupera pas du tout ; car si l'équation précédente a deux racines réelles, celle que l'on obtiendra en égalant à zéro la dérivée du premier membre, aura toujours une racine réelle, mais cette racine devra donner un résultat négatif. Si on la substitue à x dans l'équation en x^4, puisqu'une des racines de cette dernière est comprise entre $+\infty$ et celle de la dérivée, et l'autre entre celle-ci et $-\infty$, en résolvant l'inégalité on trouverait une valeur maximum pour h.

L'équation en x^4 fait voir également que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x ; car pour deux valeurs de h égales et de signes contraires, elle est identiquement la même.

SUR LA CONSTRUCTION

Des racines de l'équation du quatrième degré par l'intersection d'une parabole et d'un cercle ;

PAR M. JULES VIEILLE.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

dont on se propose de construire géométriquement les racines.

Le moyen le plus simple consiste, comme on sait, à employer la parabole ayant pour paramètre l'unité, et le cercle. A cet effet, on pose

$$(2) \qquad x^2 = y.$$

En remplaçant x^2 par y dans l'équation (1), on a

$$(3) \qquad y^2 + py + qx + r = 0,$$

puis si l'on ajoute membre à membre les équations (2) et (3), il vient

$$(4) \qquad y^2 + x^2 + (p-1)y + qx + r = 0,$$

équation d'un cercle dont les points d'intersection avec la parabole représentée par l'équation (2) ont pour abscisses les racines de l'équation (1). Mais ce cercle n'est pas toujours réel. Si l'on écrit son équation sous la forme

$$\left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{(p-1)^2 + q^2}{4} - r,$$

on voit qu'il sera imaginaire toutes les fois qu'on aura

$$(5) \qquad r > \frac{(p-1)^2 + q^2}{4};$$

Et alors se présentent ces deux questions :

1°. *Quand le cercle défini par l'équation* (4) *est imaginaire, l'équation* (1) *a-t-elle ses racines imaginaires?*

2°. Réciproquement, *quand l'équation* (1) *a ses racines imaginaires, le cercle est-il toujours imaginaire?*

La réponse à la première question est affirmative : toutes les fois que le cercle est imaginaire, il est vrai que l'équation (1) a ses racines imaginaires. En effet, à une valeur réelle de x qui vérifierait l'équation (1), correspondrait une valeur réelle de y tirée de l'équation (2); et comme les solutions du système (1) et (2) vérifient nécessairement l'équation (4), il s'ensuivrait que cette dernière admettrait une solution réelle, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi, quand l'inégalité (5) aura lieu, on sera certain que l'équation proposée n'a que des racines imaginaires, et, par conséquent, toute autre combinaison de lieux géométriques *réels* serait inutile à chercher, en vue de construire ces racines.

Il n'en est pas de même de la seconde question : de ce que l'équation (1) a ses racines imaginaires, il ne s'ensuit pas que le cercle défini par l'équation (4) soit nécessairement imaginaire. On conçoit en effet que, pour certaines valeurs des coefficients p, q, r, le cercle, quoique réel, puisse ne pas couper la parabole, dont l'équation ne dépend pas de ces mêmes coefficients. Pour éclaircir ce point, attachons-nous à l'équation plus simple

$$x^4 + qx + r = 0,$$

dans laquelle le terme en x^2 manque. La condition pour qu'elle ait ses quatre racines imaginaires est aisément fournie par le théorème de Sturm. La voici

$$256r^3 - 27q^4 > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \qquad r > 3\left(\frac{q}{4}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

D'autre part, l'inégalité (5) se réduit, pour $p = 0$, à

$$(7) \qquad r > \frac{1+q^2}{4}.$$

D'après ce que nous avons démontré plus haut, l'inégalité (6) doit être une conséquence de l'inégalité (7). C'est ce que nous allons d'abord vérifier, en faisant voir qu'on a toujours

$$\frac{1+q^2}{4} > 3\left(\frac{q}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$$

ou

$$4(1+q^2)^3 - 27q^4 > 0.$$

En effet, si l'on développe le cube et qu'on pose

$$q^2 = z,$$

le premier membre de cette inégalité prend la forme

$$4z^3 - 15z^2 + 12z + 4,$$

et l'on reconnaît que $z = 2$ le réduit à zéro; de plus, le quotient par $z - 2$ est encore annulé pour $z = 2$; en sorte que l'on trouve

$$4z^3 - 15z^2 + 12z + 4 = (z-2)^2(4z+1).$$

Par suite, en rétablissant q^2 à la place de z, on voit que l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(q^2-2)^2(4q^2+1) > 0.$$

Sous cette forme, elle est évidemment satisfaite pour toute valeur numérique de q, à l'exception de $q = \pm\sqrt{2}$.

double valeur pour laquelle le premier membre se réduit à zéro. Quand on suppose $q = \pm \sqrt{2}$, les inégalités (6) et (7) s'accordent à donner $\frac{3}{4}$ pour limite inférieure de r.

En résumé, lorsqu'on cherche à construire les racines de l'équation du quatrième degré par l'intersection de la parabole $x^2 = y$ avec un cercle, et qu'on rencontre un cercle imaginaire, l'équation proposée a aussi ses racines imaginaires. Mais cette analyse prouve que la réciproque n'est pas vraie : que si l'équation

$$x^4 + qx + r = 0$$

a ses racines imaginaires, le cercle sera néanmoins réel tant que r aura une valeur positive comprise entre $3\left(\frac{q}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ et $\frac{1+q^2}{4}$. Ces deux limites coïncident quand on a $q^2 = 2$; et, dans ce cas, pour toute valeur de r supérieure à $\frac{3}{4}$, le cercle et les racines de l'équation proposée sont imaginaires à la fois.

SOLUTION DE LA QUESTION 392 (PROUHET)

(voir page 311);

PAR M. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Si l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

est de degré *pair*, et si ses racines peuvent se partager en

couples donnant la même somme $2s$, l'équation

$$(2) \qquad f'(x) = 0$$

admettra la racine s, et ses autres racines se partageront en couples donnant la même somme $2s$.

Si l'équation (1) est de degré *impair*, ayant une racine égale à s et toutes ses autres racines pouvant se partager en couples dont la somme égale $2s$, les racines de l'équation (2) se partageront aussi par couples donnant la même somme $2s$.

Dans le premier cas, les équations

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{\text{v}}(x) = 0,$$

et dans le second les équations

$$f(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f^{\text{iv}}(x) = 0$$

auront en commun la racine s.

Je m'occupe d'abord du premier cas. Puisque les racines se partagent par couples donnant la même somme $2s$, le polynôme $f(x)$ peut se décomposer de la manière suivante

$$f(x) = (x - a)[x - (2s - a)](x - b)[x - (2s - b)]\ldots$$

ou bien

$$f(x) = [x^2 - 2sx + a(2s - a)] \times [x^2 - 2sx + b(2s - b)].$$

Prenant la dérivée d'un produit suivant la règle, j'ai

$$f'x = 2(x - s) \times \left[\frac{fx}{x^2 - 2sx + a(2s - a)} + \frac{f(x)}{x^2 - 2sx + b(2s - b)} \ldots\right].$$

Je remarque d'abord que l'équation

$$f'(x) = 0$$

admet bien la racine s, puisque $f'(x)$ est divisible par $(x-s)$.

De plus, si ayant supprimé le facteur commun $(x-s)$, je considère l'équation composée d'une somme de produits

$$[x^2-2sx+a(2s-a)][x^2-2sx+b(2s-b)]\ldots=0,$$

je vois que le premier membre ne change pas quand on y remplace x par $2s-x$. Si donc un nombre x' est racine, $2s-x'$ le sera aussi, et les racines se distribueront bien par couples donnant la même somme $2s$, comme il fallait le démontrer.

Je passe au second cas.

Le polynôme peut se mettre sous la forme

$$fx=(x-s)[x^2-2sx+\alpha(2s-\alpha)]$$
$$\times[x^2-2sx+\beta(2s-\beta)]\ldots;$$

donc

$$f'x=\frac{fx}{x-s}+\frac{2(x-s)fx}{x^2-2sx+\alpha(2s-\alpha)}$$
$$+\frac{2(x-s)fx}{x^2-2sx+\beta(2s-\beta)}+\ldots.$$

Comme précédemment, si je remplace dans ce polynôme x par $(2s-x)$, il ne changera pas de valeur.

Car dans le premier terme les deux termes de la fraction changent de signe en conservant la même valeur absolue. La fraction reste donc la même.

Il en est de même des autres.

Ainsi donc encore, si un nombre x' est racine de l'équation

$$f'(x)=0,$$

$2s-x'$ l'est aussi. Autrement dit, les racines de cette équation se partagent par couples donnant la même somme $2s$: ce qu'il fallait démontrer.

Or maintenant $f'x$ est un polynôme de degré pair.

dont les racines se partagent par couples donnant la même somme $2s$. Donc, d'après la première partie du théorème,

$$f''(x) = 0$$

admet la racine s, s est de degré impair.

Et les autres racines se distribueront par couples donnant la même somme $2s$. Donc, d'après la seconde partie du théorème, l'équation

$$f'''(x) = 0$$

sera de degré pair et ses racines jouiront de la même propriété. On en conclura encore que l'équation

$$f^{\text{IV}}(x) = 0$$

admet la racine s.

Alors on voit que si $f(x) = 0$ est de degré impair, les équations

$$f(x) = 0,\quad f''(x) = 0,\quad f^{\text{IV}}(x) = 0, \ldots$$

admettent en commun la racine s.

Et on ferait voir de la même manière que si $f(x)$ est de degré pair, les équations

$$f'(x) = 0,\quad f'''(x) = 0,\quad f^{\text{V}}(x) = 0, \ldots$$

admettent la racine s.

SOLUTION DE LA QUESTION VIII DE M. P. DE LAFFITTE

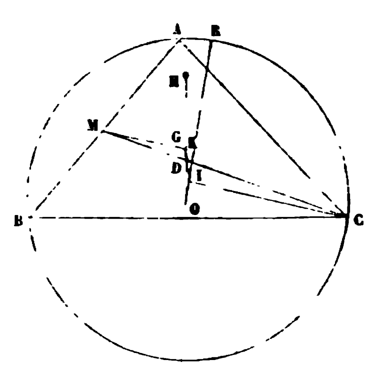
(voir page 206);

PAR M. LEGRANDAIS,

Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. J. Vieille).

Soit un triangle ABC; on joint le centre G du cercle

inscrit au milieu M de AB, et par le point C on mène CI parallèle à GM, et on prend sur cette parallèle CI = 2GM. Il s'agit de démontrer que la plus courte distance du point I au cercle circonscrit de centre O est égale à $2r$;



r étant le rayon du cercle inscrit (*). Ainsi

$$IR = 2r.$$

En effet, si je mène la médiane CM, cette ligne coupe la ligne GI en un point D tel, que l'on a

$$\frac{GM}{CI} = \frac{DM}{CD} = \frac{1}{2}.$$

Donc le point D est le centre de gravité du triangle ABC.

Cela posé, je remarque que si je mène OD et que je prenne DH = 2OD, le point H sera le point de rencontre des trois hauteurs et le milieu K de OH le centre de la circonférence qu'on nomme en géométrie la circonférence des neuf points. Or on sait que la distance des centres des cercles inscrits et circonscrits à un triangle est une moyenne proportionnelle entre les diamètres du cercle circonscrit et la distance du centre du cercle in-

(*) La ligne IDG ne coïncide pas avec OKH. TM.

scrit au centre du cercle des neuf points (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 79 et 199).

On a donc

$$OG^2 = 2R \times GK.$$

Mais

$$OG^2 = R(R - 2r);$$

donc

$$GK = \frac{R - 2r}{2}.$$

Mais les deux triangles DKG, DIO sont semblables, car on a

$$GD = \frac{DI}{2}, \quad KD = KO - DO = \frac{3DO}{2} - DO = \frac{DO}{2};$$

donc on a aussi

$$GK = \frac{OI}{2},$$

et, par conséquent,

$$OI = R - 2r;$$

donc

$$IR = 2r.$$

Note du Rédacteur. M. Louis Cremona, professeur au gymnase de Crémone, dans un Mémoire sous le titre: *Mota intorno ad alcuni teoremi di geometria segmentaria*, in-4 de 14 pages, démontre les sept théorèmes de M. Laffitte, à l'aide des procédés de la géométrie algorithmique: prenant pour axes les trois droites *doubles* de deux figures homographiques et faisant usage de coordonnées trilinéaires, l'auteur parvient avec une extrême facilité à des formules d'une symétrie et d'une élégance admirables. Le Mémoire est extrait du *Programme* publié à Crémone à la fin de l'année scolaire de 1857.

Rome possédera en 1858 un journal mathématique rédigé par MM. Betti, Brioschi, Genocchi, Tortolini, et faisant suite aux savantes *Annales* de ce dernier. Ce journal sera principalement consacré à propager les théories

symboliques de la géométrie et de l'arithmétique *universelles*.

M. Rey, professeur à Paris, traduit l'ouvrage capital du Rév. Robert Carmichael sur les calculs symboliques (voir *Bulletin*, t. I, p. 83). Trouvera-t-il un éditeur? Ce n'est pas une production πρός ἄλφιτον.

SOLUTION DE LA QUESTION 391 (PROUHET)

(voir page 311);

PAR M. TRAVERSE,
Élève de l'institution Favart (classe de M. Colombier).

Désignons par a le rapport de DC à DE et par θ l'angle D. Je construis le triangle ADB : ce qui fait connaître les positions des trois sommets A, B, D du pentagone. Des points A, B comme centres, et avec des rayons respectivement égaux à AE, BC, je décris des circonférences. Je joins le point D à un point quelconque K pris sur l'une de ces circonférences, sur la circonférence A par exemple, et je détermine le point M de manière que l'on ait

$$\widehat{\text{KDM}} = \theta \quad \text{et} \quad \frac{\text{DM}}{\text{DK}} = a.$$

Le lieu des points tels que M est toujours une ligne semblable à celle qui a servi à la construire. Dans le cas actuel, ce lieu est une circonférence. Pour la déterminer, en grandeur et en position, prenons DH et HI de telle sorte que $\frac{\text{DH}}{\text{DA}} = a = \frac{\text{HI}}{\text{AE}}$ (*). Menons DF de manière que l'angle ADF soit égal à θ; puis prenons DF égal à DH. Le point F ainsi déterminé sera le centre de cette circonférence, et son rayon sera égal à HI.

(*) HI est parallèle à AE et I est sur le côté DE. TM.

La circonférence F coupe, je suppose, en deux points C et C′ la circonférence B. Prenons un quelconque de ces deux points, c par exemple, pour quatrième sommet du pentagone. Je mène la droite DN faisant avec DC un angle égal à θ. La droite DC et la circonférence F auront autant de points communs que la droite DN et la circonférence A. En supposant que DC ait deux points communs avec la circonférence F, j'appelle E celui des deux points d'intersection de DN avec la circonférence A qui satisfait à $\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DE}} = a$. Le point E sera le cinquième sommet du pentagone demandé.

Scolie. Le nombre de points communs aux circonférences B et F donne le nombre des solutions du problème.

NOTE POUR LA PAGE 316;

PAR M. E. CATALAN.

En adoptant les raisonnements de l'auteur, on doit lire

$$\mathrm{N} = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$

et la formule est

$$x = \frac{1}{1296} m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$
$$\times (m^4 + m^3 - 73m^2 + 257m - 102).$$

RECTIFICATION (pages 432 et 433).

Le nombre des racines de l'équation

$$x - 1000\pi.\sin x - 50\pi = 0$$

n'est pas 2001, mais 1999. Cette équation n'a aucune racine comprise entre -950π et $\left(-950+\frac{1}{2}\right)\pi$; elle n'a aucune racine comprise entre $\left(1050-\frac{1}{2}\right)\pi$ et 1050π.

G.

THÉORÈME SUR LES NORMALES;

PAR M. DEWULF,
Officier du Génie.

Si dans le plan d'une courbe de degré n on décrit un cercle quelconque et que par les $2n$ points d'intersection on mène les normales à la courbe, le centre du cercle est le centre des moyennes harmoniques des $2n$ points d'intersection des $2n$ normales avec un diamètre quelconque du cercle.

Démonstration.

$F=0$ équation de la courbe, $\varphi = x^2+y^2-C=0$ équation du cercle; r étant l'ordonnée à l'origine d'une normale, on a

$$\frac{1}{r} = 2\,\frac{\dfrac{dF}{dx}}{\dfrac{d\varphi}{dy}\dfrac{dF}{dx}-\dfrac{d\varphi}{dx}\dfrac{dF}{dy}},$$

et, d'après le théorème de Jacobi (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 124), $\sum \frac{1}{r} = 0$. C. Q. F. D.

Nota. Je préviens derechef les élèves que $\frac{dF}{dx}$ est la dérivée de F par rapport à x, de même $\frac{dF}{dy}$, et les prie de vouloir bien faire usage de cette notation dans les travaux qu'ils m'adressent; ils en tireront de grands avantages.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVI.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Analyse combinatoire.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie descriptive.

Trigonométrie plane et sphérique.

Géométrie de l'espace; Lignes et Surfaces.

Géométrie algorithmique.

Coniques planes.

Surfaces du second degré.

Surfaces du troisième degré.

Géométrie pratique.

Mécanique.

Physique mathématique; Astronomie.

Questions proposées.

Questions résolues.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

(*) Élèves admis : 120.

(*) Élèves admis : 50.

ERRATA.

Pages.	Lignes	Au lieu de :	Lisez :
141	17 en remontant,	Carénon,	Carénou.
151	11 en remontant,	deuxième,	troisième.
204	10 en descendant,	des coniques,	ces coniques.
310	10 en remontant,	eF, dF_2, e_1F_1, dF_2,	$eF\,dF_2$, $e_1F_1dF_2$.
378	3 en remontant,	axe,	arc.
379	4 en descendant,	axe,	arc.
379	5 en descendant,	un,	une.
390	15 en descendant,	a, b, c, d,	a', b', c', d'.
401	7 en remontant,	$-x^2$,	$+x^2$.
428	11 en remontant,	Carénon,	Carénou.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, nº 12.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

SUR L'EXISTENCE PRÉTENDUE, dans la Massorah, d'un nombre exprimé selon un système de position. Époque présumée d'admission chez les Arabes. Origine du signe ∞.

On sait que les Israélites attachent une importance extrême à la conservation du texte de l'Ancien Testament et ont pris des précautions minutieuses pour qu'on n'y puisse faire aucune addition, aucune soustraction, fût-ce même d'une lettre, d'un point-voyelle; qu'on ne puisse changer une lettre majuscule en minuscule et *vice versâ*, etc. A cet effet et à diverses époques, des scribes se sont occupés de compter dans chaque livre de la collection biblique le nombre des mots, le nombre des versets, le nombre de fois qu'un même mot se rencontre, etc. Le recueil de toutes ces données numériques forme un ouvrage appelé la Massorah, ce qui signifie la *tradition*. L'époque de la formation et les auteurs de ce recueil sont également inconnus. Une opinion l'attribue à Esdras; mais la critique historique assigne l'intervalle du IIIe au VIe siècle de l'ère vulgaire. S'il existait donc dans cet ou-

vrage un nombre écrit suivant notre système de numération, ce serait la plus ancienne apparition de ce système. Voici ce qui a fait croire à l'existence d'un tel fait. Les nombres sont représentés chez les Hébreux, ainsi que chez les Arabes et les Grecs, par des lettres de l'alphabet : de sorte que chaque mot de la langue a une valeur numérique. D'après cela, les Massorètes, pour fixer un nombre donné dans la mémoire, indiquent un verset de la Bible où se trouve un mot qui a cette valeur numérique. C'est ce qu'on nomme le *simn*, le signe du nombre (*). Or le nombre des versets du Pentateuque est 5845; les Massorètes donnent pour *simn* le verset 26 du chap. 30 d'Isaïe : *veor hachamah jeheje scivazaïme*, la lumière du soleil sera septuplée; *chamah* (*ch* guttural) est un des noms du soleil (**); le *ha* remplace le génitif *du*. Ce mot renferme quatre lettres écrites de droite à gauche : *he* valant 5, *chet* valant 8, *mem* valant 40, *he* final valant 5. Mais ce mot doit rappeler le nombre 5845; d'où l'on infère qu'en partant de la droite 5 vaut 5000, 8 vaut 800. Il y a donc ici une valeur de position. Mais c'est là une rencontre fortuite. Les Massorètes ne pensaient pas à une telle numération : s'ils avaient eu cette intention, ils auraient remplacé le *mem*, dont la valeur effective est 40, par le *daleth* qui, comme le *delta* grec, vaut 4; on aurait eu *hachadah*. D'ailleurs il n'y avait aucune erreur à craindre; en prenant la valeur absolue des lettres, le *hachamah* vaudrait 58, et personne ne s'avisera de croire qu'il n'y a que 58 versets dans le Pentateuque.

La valeur numérique des lettres chez les Grecs et les Arabes a beaucoup nui aux progrès de la science. Ces

---

(*) *Simn* en grec Σημαινω. Cette prononciation est favorable au système des *itistes*.

(**) *Chamah*, littéralement la chaleur; en grec Καυμα, brûlure.

peuples connaissaient et cultivaient comme nous une analyse algébrique, mais ils n'ont jamais pu parvenir à une écriture algébrique, par la raison toute simple que les lettres ayant une valeur numérique déterminée ne pouvaient servir à représenter des nombres quelconques. Il est à remarquer que les Grecs possèdent une double lettre, le *sti*, qui n'a pas de valeur numérique (*) ; aussi Diophante a pris le *sti* pour représenter l'inconnue du problème, le x des modernes. Dans les questions à plusieurs inconnues, il a soin de chercher d'abord les relations entre les inconnues et celle qu'il désigne par le *sti*. C'est dans ces occasions qu'il déploie les ressources variées de son génie si éminemment analytique. Quelquefois pourtant il désigne dans la même question des inconnues différentes par la même figure *sti*, et cela rend souvent la lecture pénible et le raisonnement difficile à suivre. Il fait déjà usage d'abréviations qui portent chez les rabbins le nom de *rasch hatebath*, têtes de mots. Ainsi il écrit δῦ, κῦ, au lieu de δυναμις, carré, κυβος, cube. Pour désigner le *manque* (notre moins), il prend la lettre ψ renversée (ↁ) tirée du mot λειψις ; mais il n'a pas de signes pour les autres opérations.

L'alphabet latin n'est pas généralement numéral : sept lettres seulement sont devenues constamment numérales, savoir C, D, I, L, M, V, X. Ce sont d'anciens signes numériques transformés peu à peu en lettres (**) ; mais les Romains n'avaient pas de dispositions pour les mathématiques : toutefois Cicéron nous parle d'un patricien ami du premier Scipion, et qui était plongé nuit et jour dans les méditations géométriques et astronomiques.

(*) Il ne faut pas confondre cette double lettre avec le signe *épisème* qui représente le nombre 6, auquel elle ressemble.

(**) *Voir* Probus, page 5.

Mori pene videbamus in studio dimetiendi cœli atque terræ C. Gallum, familiarem patris tui, Scipio. Quoties illum lux noctu aliquid describere ingressum, quoties nox oppressit quum mane cœpisset! Quam delectabat eum, defectiones solis et lunæ multo nobis ante prædicere (De Senect, § 49).

Ainsi ce Gallus savait calculer et prédire les éclipses. Souvent il fut surpris par la nuit dans une opération de géométrie commencée au matin; surpris par le jour dans une opération commencée la veille au soir. On raconte la même chose de Viète, véritable inventeur de l'algèbre symbolique, trois siècles après que Fibonacci eut importé l'algèbre discursive des Arabes.

D'après un manuscrit de la Bibilothèque impériale de Paris (952e supplément arabe), M. Woepcke est d'opinion qu'au commencement de la seconde moitié du xe siècle de notre ère, des géomètres de l'Orient (principalement de Chiràz) se servaient déjà de chiffres indiens avec valeur de position et emploi d'un signe pour zéro (*), et ce signe est un petit cercle. On peut facilement faire dériver les figures de nos chiffres de celles-ci, excepté le 8, qui ressemble à notre 7, tandis que le 7 est représenté par notre 7 renversé (L); l'origine de notre 8 présente des difficultés.

M. Prouhet, remarquant que le ∞ couché désignait mille chez les Romains et que ce mot *mille* se dit quelquefois par emphase pour un nombre très-considérable, émet l'ingénieuse conjecture que c'est l'origine du signe employé pour l'infini.

(*) *Annali di Scienze matematiche et fisiche* di Tortolini, t. VII, pages 321-188, en français.

BIBLIOGRAPHIE.

M. Valerius Probus, de Notis antiquis; herausgegeben von *Theodore Mommsen*. Besonders abgedruckt aus den berichten der K. S. Ges. der Wissenschaffen, phil.-hist. Classe 1853. Leipzig bei S. Hirzel, t. V, de 91 à 134 (43 pages). — V. Probus, Sur les anciens signes, édité par T. Mommsen.

Valerius Probus a composé un opuscule sur la signification des abréviations usitées dans les actes publics et judiciaires. On possède plusieurs manuscrits de cet opuscule que M. Mommsen décrit et discute. Voici ces manuscrits :

1°. Cyriaque d'Ancône; il est le premier chez lequel on rencontre le nom de Probus attaché aux *Notæ*. Cyriaque paraît avoir copié en 1442 à 1443 un manuscrit de Probus.

2°. Giovanni Marcanova, médecin mort à Pavie en 1467. Il a fait copier calligraphiquement les manuscrits de plusieurs épigraphistes, entre autres Feliciano et Cyrianus. Un de ces manuscrits existe à Berne; ce manuscrit contient 201 pages. Aux pages 160-162, on trouve le Probus légitime (*aecht*) distribué selon l'ordre méthodique; aux pages 164-165, une explication des signes des nombres depuis 1 jusqu'à 1 000 000, explication qui commence ainsi : *Quoniam mentio cœpit de numeris breviter ostendamus qua figura quis numerus repræsentetur. Omnis numerus, ut ait Boetius, per Figuram unitatis repræsentari debet.* Ceci est imprimé dans l'édition de Probus par Ernst comme formant le chapitre XXV, et aussi dans l'édition de 1499, mais sans citer Boëce. Mommsen n'a

pu découvrir ce passage dans Boëce. De 170 à 190, *de Notis antiquis*, de Pierre Diaconus; page 191, *Sequitur de numero litterarum:* c'est l'alphabet numérique de E jusqu'à Z, mais non en vers; aux pages 194 à 201, les Notes de Probus arrangées selon l'ordre alphabétique. Ce manuscrit a été écrit par Mercanova ou sous sa direction, de 1457 à 1460.

3°. *Manuscrit de Vienne.* Il est du xe siècle, contient des gloses sur Priscien et Venantius Fortunatus; mais les quatre premières pages sont de la main du bibliothécaire Conrad Celtes (1459-1508). Elles contiennent M. Valerii Probi *de Notis antiquis opusculum,* et, après la phrase finale, τελος θεω χαρις, on lit les vers mnémoniques suivants sur l'alphabet numérique; ces vers sont reproduits dans deux autres manuscrits plus récents. Mommsen dit qu'il les imprime parce qu'il ne sait pas qu'on les ait déjà publiés; on les trouve pourtant dans la *prima parte del general Trattato* de Tartaglia (1556), page 4.

A.	Possidet A numerum *quingenties* ordine recto	$\overset{c}{\mathrm{V}}$
B.	Et B *ter centum* pro se retinere probatum	CCC
C.	Et sibi C *centum* jam constat habere connexum	
	Non plus quam *centum* C numero constat habere	
D.	Alpha D et compar *duo et tria* nomina portat	CCCCC
E.	E quo *ducenti cum quinquaginta* tenetur	CCL
F.	Sexta *quater decem* gerit F que distat ab alpha	XXXX
G.	Ergo *quater centum* C nunc caudula reservat	CCCC
H.	Litera H quondam, *ducentum* notaque quondam	CC
I.	I retinet *unum* vocalibus unque tenetur	I
K.	*centenarium medium* servat et *unum*	CL
L.	*Quiquies* L *decem* monstrat numerantibus ecce	XXXXX
M.	M caput est numeri quem scimus *mille* teneri	Mille
O.	O numerum gestat qui nunc *undecimus* extat	XI
Θ.	*Nonaginta* canat quæ sic Θ caput esse videtur	XC
P.	P similem qui G numerum monstratur habere	CCCC
Q.	Q sicut D sequetur numerum similemque tenendo	CCCCC
R.	*Octaginta* facit numerum qui dicitur R	LXXX
S.	Hebdomade speciem S suscipit hec quoque *septem*	LXX
T.	*Centum* tollit de *sexaginta* bicornis	CLX

V.	V vero pessundans numero plus quam *quinque* redundas	V
X.	Duplex X solito *decem* jam morem putato	VV
Y.	Argolicum callem graditur facitque caracter	XCLL
Z.	Ultima Z canit lidem *bis mille* tenere.	

Tartaglia présente dans l'ouvrage cité ci-dessus des variantes importantes aux lettres suivantes :

B. Au lieu de *probatum*, il a *conetur*.

C. Il n'a que le second vers : Non plus quam centum C constat habere connexum.

D. *Alphæ*.

I. Retinens centum vocalibus una tenetur cento.

N. Nonaginta capit quæ si caput esse videtur.

P. Similis quoque.

T. ... Tollit cum sexaginta.

V. ... Non plusquam.

X. More putatur.

Y. Argolicum callem graditur K; Y que caracter. Cent cinquante.

Z. ... Tenetur.

Le texte de Tartaglia est plus conforme aux règles de la prosodie.

Probus, cité par Tartaglia, donne les raisons suivantes pour les valeurs numériques des six lettres V, X, L, C, D, M.

V est la cinquième voyelle;

X la dixième consonne;

L se change souvent en N, ainsi *Lympha, Nympha*, et N signifie cinquante chez les Grecs;

C initiale de *centum*;

D pour plusieurs raisons : il y a cinq consonnes entre D et M; autre raison : D lettre initiale de *dimidium*, moitié de mille.

M initiale de mille.

Tartaglia réfute ces raisons et en donne d'autres qui ne valent guère mieux.

M. Soleirol, chef de bataillon du Génie, en retraite, déduit ces six signes des instruments qui ont pu servir à les trouver, surtout de la *taille*, instrument encore en usage chez les boulangers (*Mémoires de l'Académie de Metz*, 1854-1855) (*).

C'est à la page 119 du Mémoire de M. Mommsen qu'on trouve l'opuscule de V. Probus. Les mots sont rangés systématiquement sous quatre rubriques.

1. *In monumentis publicis et historiarum libris sacrisque publicis reperiuntur.*

Contient vingt-quatre notes. *Exemples :*

P....	Publicies.
L....	Lucius.
P.C..	Patres conscripti.
S.N.L	Socii nominis latini.

2. *Litteras singulares in Jure civile de Legibus et Plebiscitis nunc ponimus.*

Contient aussi vingt-quatre notes. *Exemples :*

P.I.R...	Populum jure rogavit.
L.P.C.R.	Latini prisci cives Romani.
S.F.S...	Sine fraude sua.
V.F.....	Usus fructus.

3. *In legis actionibus hæc.*

Contient onze notes. *Exemples :*

A.T.M.D.O........	Aio te mihi dare oportere.
Q.N.T.S.Q.P......	Quando negas te sacramento quingenario provoco.
T.PR.I.A.V.P.V D.	Te prætor indicem arbitramve postulo uti des.

(*) On lit une explication plausible de ces signes dans *the Philosophy of arithmetic* de Leslie, introduction.

4. *De edictis perpetuis hæc.*

Contient vingt-trois notes. *Exemples :*

V.B.A...	Viri boni arbitratu.
Q.S.S.S.	Quæ supra scripta sunt.

Probus a été édité par Ernst, Lindenbrog, Gothefred, Putsch.

Suétone, dans sa Biographie (*De illust. gramm.*, c. 24), parle de Probus de Beryte, grammairien, et il dit : *Multa exemplaria contracta emendare ac distinguere ac adnotare curavit, soli huic nec ulli præterea grammatices parti deditus,* et qu'il a aussi publié : *Pauca et exigua de quibusdam minutis quæstionibus.* Mommsen croit que ces *minutis quæstionibus* sont les *Notæ* et qu'ainsi l'auteur des Notes a vécu sous Néron et sous Domitien. Il a publié aussi *Commentarius satis curiose factus de occulta litterarum significatione epistolarum C. Cæsaris scriptarum* (Gell., 17, 9; Suet. Cæs., 56). Existe-t-il des monuments où l'on rencontre des valeurs numériques exprimées par les lettres indiquées par Probus ? Il est possible que ces signes numériques aient été purement usités dans les opérations financières ou dans les actes commerciaux privés et non dans les actes publics.

DÉNOMINATIONS ET REPRÉSENTATIONS DES FRACTIONS CHEZ LES ROMAINS.

PREMIER SYSTÈME. — *L'as est l'unité.*

$\frac{12}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{7}{12}$
FF	S ═ — ═	S ═ ═	S3	— S —	V
As	*Deunx*	*Dextans*	*Dodrans*	*Bes*	*Septunx*

$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
S	═ — ═	═ ═	═ —	═	—
Semissis	*Quincunx*	*Triens*	*Quadrans*	*Sextans*	*Uncia*

SECOND SYSTÈME. — *L'once est l'unité.*

$\frac{1}{2}$ once	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$
E	VV	G	V	Ɪ	CIↃ
Semuncia	*Duella*	*Sicilicus*	*Sexcula*	*Drachma*	*Semissecla*

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{192}$
H	ZZ	[illegible]	M	Z	CIII	Q
Tremissis	*Scrupulus*	*Obolus*	*Bissiliqua*	*Ceraces*	*Siliqua*	*Chalcus*

As, terme tarentin, d'où εἷς, un, divisé en douze parties ou *onces*.

Deunx, un douzième ôté, reste $\frac{11}{12}$.

Dextans, un as moins un sixième, *sextans*, reste $\frac{10}{12}$.

Dodra, *δοδρα*, breuvage de neuf ingrédients.

Be-as, *binæ partes assis* = deux tiers de l'as = *bitertius*.

Semi, de ημι.

Sicilicus, mesure de longueur, $\frac{1}{4}$ du pouce de superficie, $\frac{1}{48}$ du *jugerum* (journal de terre), $\frac{1}{48}$ de l'heure; monnaie de deux drachmes.

Drachme, petite monnaie grecque équivalente à peu près au denier romain.

Scrupus, petite pointe de rocher.

Tremissis, trois vingt-quatrièmes d'once.

TABLES DE BARKER.

Ces Tables citées par Gauss (voir *Bulletin*, tome II, page 16), quoique datant de 1757 et d'une grande utilité pour le calcul des orbites paraboliques, sont presque inconnues en France. Elles ont été données pour la première fois dans l'ouvrage suivant :

An account of the discoveries concerning comets, with the way to find their orbits, and some improvements in constructing and calculating their places, for which reason are here added new Tables, fitted to those purposes; particulary with regard to that comet, which is soon expected to return; by Thomas Barker, Gent. London.

J. Whiston and B. White, 1757, grand in-4 de 54 pages et une planche.

Il s'agit du retour de la comète de 1682, d'après la méthode de Newton. C'est la célèbre comète périodique de Halley. Les nombres de Barker sont avec 5 décimales et les logarithmes avec 6 décimales.

La seconde de ces Tables donne l'aire parabolique correspondante à l'anomalie vraie, croissant par 5 minutes, ainsi que les logarithmes des distances de la comète, avec les différences premières, la distance périhélie étant prise pour unité. Lalande, dans sa *Bibliographie astronomique* (page 469), cite une édition format in-8 de 1759.

Ces mêmes Tables ont été reproduites textuellement et sans révision dans cet ouvrage :

On the determination of the orbits of comets, according to the methods of father Boscowich and M. de Laplace with new and complete Tables and examples of the calculation by both methods; by sir Henri Englefield, bar. t. F. R. S. et F. A. S. London. Printed by Richie and Sammels for Peter Elmsly in the Strand 1379, 1779, 204 pages sans les Tables, 4 planches.

Dans la préface, l'auteur dit avoir donné connaissance de l'écrit de Barker à Pingré et à Méchain et que ce dernier avait fait un grand éloge des Tables cométaires paraboliques.

En 1797, de Zach ayant publié le célèbre Mémoire d'Olbers sur le calcul parabolique, et cela à l'insu de l'auteur, mais avec son consentement tacite, il y joignit les Tables de Barker, revues par une personne qui a voulu garder l'anonyme. Enfin, en 1847, le célèbre directeur de l'observatoire de Berlin donna une nouvelle édition du Mémoire d'Olbers sous ce titre :

Abhandlung über die Leichteste und bequemste methode die bahn eines Cometen zu berechnen, von D[r]

Wilhem Olbers. Mit berichtingung and erweiterung des Tafeln and Fortsetzung des Cometen-Verzeichnisses bis zum Jahre 1847, von neuen herausgegeben von J.-F. Encke, director der Berliner Sterwarte, mit dem Bildniss von Olbers und einer Figuren-Tafel. Weimar. Druckund Verlag des Landes-Industrie-comptoirs, 1847.

Mémoire sur la méthode la plus facile, la plus commode pour calculer l'orbite d'une comète, par le Dr Guillaume Olbers, avec rectification et augmentation de Tables et continuation du catalogue des comètes jusqu'à l'année 1847, éditées de nouveau par J.-F. Encke, directeur de l'observatoire de Berlin, avec le portrait d'Olbers et une planche. Weimar; in-8 de xxiv-250 pages.

Les Tables de Barker ont été calculées de nouveau par M. Luther, l'astronome qui a reçu l'année dernière le prix Lalande pour la découverte de l'astéroïde *Bellone.*

La Table de Barker, troisième du Mémoire, remplit les pages de 87 à 147.

Voici la disposition (voir *Bulletin,* t. II):

$C = \frac{75K}{\sqrt{2}} = 0{,}9122791 =$ constante;

$\log C = 9{,}9601277$;

$q =$ la plus petite distance;

$m = \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} =$ mouvement moyen diurne;

$t - T =$ nombre de jours moyens comptés à partir du périhélie;

$v =$ anomalie vraie;

$M = m(t - T)$.

Chaque page contient sept colonnes. Ces colonnes sont divisées par des lignes horizontales formant des rectangles; chaque rectangle contient six indications, et chaque page six rectangles.

La première colonne contient les valeurs de ν depuis o jusqu'à 179° 60′, croissant par 1′40″. Les six autres colonnes contiennent les valeurs de M correspondant aux ν et à côté les différences premières : de sorte que chaque page contient trois colonnes M ; les degrés se lisent au haut de la page. A partir de 30 à 180 degrés, on trouve non les valeurs de M, mais celles de log M. Connaissant ν, on trouve donc M, et *vice versâ;* connaissant q et t — T, on calcule M, et la Table donne ensuite la valeur de ν correspondant à M.

Delambre reproche aux Tables de Barker de ne pas donner assez de précision ; mais ces Tables procèdent par 300 secondes, tandis que celles de Luther procèdent par 100 secondes, et les logarithmes ont 8 décimales (Delambre, *Astronomie théorique et pratique,* tome III, pages 213-455).

Parlant de la méthode d'Olbers, il dit que c'est une des plus simples et des plus ingénieuses qu'on ait imaginées (*ibid*, p. 348). Ce Mémoire n'est pas encore traduit. La Commission supérieure d'Instruction publique devrait faire dresser une liste des Mémoires importants à traduire et qu'on pourrait présenter comme thèses dans les examens. On n'a pas besoin d'insister sur l'utilité d'une telle mesure.

Les Tables contenues dans le Mémoire d'Encke sont :

Tables I et II. Conversion des parties décimales du jour en parties sexagésimales.

Table III. Celle de M. Luther.

Table IV. Table auxiliaire pour le calcul de l'anomalie vraie lorsqu'elle approche de 180 degrés.

Table V. Pour passer de la parabole à l'ellipse ou à l'hyperbole, d'après le *Theoria motus corporum cœlestium.*

Table IV. Eléments de toutes les comètes calculées jusqu'ici (1847), réunis par le Dr Galle.

Ces comètes sont au nombre de cent soixante-dix-huit. Les éléments sont :

1° Temps de passage au périhélie, temps moyen de Paris; 2° longitude du périhélie; 3° longitude du nœud ascendant; 4° inclinaison; 5° logarithme de la distance périhélie; 6° logarithme du mouvement moyen; 7° excentricité; 8° direction. On donne les noms des divers calculateurs. Les comètes sont disposées par ordre chronologique. Chaque comète périodique conserve le même numéro. La plus ancienne comète, portant le n° 1, est de — 371; calculée par Pingré (*Cometœgr.* I, p. 259); d'après les données d'Aristote.

La comète de Halley, faisant sa révolution dans environ soixante-seize ans, porte le n° 19. On la trouve pour la première fois en 1375, ensuite en 1456, 1531, 1607, 1682, 1759, 1835 (*voir* Laugier, *Connaissance des Temps,* 1846, p. 99; *Comptes rendus,* t. XVI, p. 1003).

Comète d'Encke (n° 96). 1786, 1795, 1805, 1819, 1822, 1825, 1829, 1832, 1835, 1838, 1842, 1845 (révolution en 1207 jours).

Comète de Biela (n° 84). 1772, 1806, 1826 (révolution en 6 $\frac{3}{4}$ années).

Table VII. Plus petites distances des orbites cométaires à l'orbite de la Terre pour les comètes calculées jusqu'en 1795, par M. le professeur Prosperin, d'Upsal. L'unité est la distance de la Terre au Soleil. La comète qui s'est le plus rapprochée de la Terre est celle de 1680 (n° 46); sa distance est 0,0048. Elle a été découverte par Halley, en France, à moitié chemin de Calais à Paris (*Éloge de Halley,* par Mairan, dans les *Éloges* des académiciens de l'Académie royale des Sciences morts dans les années 1741, 1742, 1743, page 124 (révolution en 575 années).

SUR L'ORIGINE DU MOT MOMENT.

Les mots primitifs sont généralement monosyllabiques ou dissyllabiques: aussi en latin la forme primitive de *movimentum*, mouvement, est *momen*. On rencontre cette forme chez Lucrèce. Ainsi, lorsque l'illustre poëte du système atomistique fait cette distinction capitale entre l'agent intellectuel (*animum*) et la force vitale (*anima*) (*), il dépeint la subordination de la matière à cet agent suprême en ces beaux vers :

Cætera pars animæ, per totum dissita corpus,
Paret, et ad numen mentis momenque *movetur.*
(Lib. III, v. 144.)

« L'autre partie de l'âme, *animæ*, répandue dans tout le corps, obéit aux ordres et se dirige d'après l'impulsion de l'esprit. » Plus loin, parlant de l'extrême facilité des particules à se prêter au mouvement, il dit :

Momine *uti parvo possent impulsa moveri*
Numque movetur aqua et tantilluo momine *flutat.*
(Lib. III, v. 191.)

De *momen* on a fait *momentum* pour exprimer le mouvement que prend une balance quand on met un excès de poids dans un des bassins. On connaît ce passage de *la Sapience* si souvent cité:

Quoniam tanquam momentum stateræ, *sic est ante te orbis terrarum* (Sap. XI, 23).

(*) On rencontre une distinction analogue dans le Pentateuque: *nefesch*, anima, *neschamah*, animus. On sait que *anima* et *animus* viennent de *ανεμος*, souffle et vent, et en hébreu aussi *rouach* (guttural) signifie vent et esprit.

La grandeur de ce mouvement de balance dépend du poids excédant et du bras de levier, de sorte que ce mouvement a pour mesure le produit du poids excédant et du bras de levier; on a donné ensuite à cette mesure le nom de l'objet (*momentum*) qu'il mesure. C'est ainsi qu'en géométrie *carré* désigne à la fois l'objet et sa mesure, de même pour le cube; mais en mécanique le mot moment a cessé de désigner l'objet, et l'expression *mouvement* dérive de *movimentum*, mot de la basse latinité.

Comme la rupture d'équilibre dans la balance produit aussitôt le *momentum*, on a donné ce nom à un intervalle de temps très-court, *temporis momentum:* c'est le dt de la dynamique, qui désigne un temps infiniment petit, *tempusculum;* mais il ne faut pas le confondre avec le mot *instant*, pure conception mentale, un point d'arrêt du temps: l'instant correspond au point de l'espace et le dt correspond au dx qui désigne une longueur infiniment petite et non pas un point. Il y a un nom spécial pour le dt, c'est *moment;* il n'y en a pas pour le dx: cela provient peut-être de ce que le temps n'a qu'une dimension.

Le dt est compris une infinité de fois dans l'unité de temps; le dx une infinité de fois dans l'unité de longueur. Le rapport de ces deux infinis considérés simultanément est fini, se désigne par $\dfrac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dx}} = \dfrac{dx}{dt}$ et se nomme *vitesse;* l'accroissement dv de cette vitesse est contenu une infinité de fois dans l'unité de vitesse: on a encore le rapport entre deux infinis $\dfrac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dv}} = \dfrac{dv}{dt}$ qu'on nomme force *accélératrice*.

LIVRES D'ARITHMÉTIQUE D'EUCLIDE.

Les IIe, VIIe, VIIIe et IXe livres d'Euclide ne traitant que des nombres appartiennent à l'arithmétique; le Xe livre, relatif aux lignes irrationnelles, quoique de nature géométrique, peut encore être classé parmi les travaux numériques. Même quand il s'agit de nombres, Euclide les représente toujours par des lignes et raisonne sur des lignes. Nous qui possédons dans la méthode arabe une excellente notation pour les nombres, nous trouvons un grand avantage à représenter les lignes par des nombres; privés de cette notation, les Anciens ramenaient au contraire les nombres aux lignes. Nous faisons de même aujourd'hui, lorsque dans les sciences expérimentales on figure les résultats numériques par les coordonnées d'une ligne. Euclide étant un auteur presque inconnu en France, le résumé suivant peut avoir quelque intérêt.

Livre II.

Ce livre a quatorze propositions; les dix premières sont arithmétiques et reviennent à ces formules modernes.

1. $ab + ac + ad + \ldots = a(b + c + d + \ldots)$.
2. $(a + b)^2 = (a + b)\,a + (a + b)\,b$.
3. $(a + b)\,a = ab + a^2$.
4. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
5. $ab + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$.
6. $(a + b)\,b + \frac{1}{4}a^2 = \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2$.

7. $(a+b)^2 + a^2 = 2(a+b)a + b^2$.

8. $4(a+b)a + b^2 = (2a+b)^2$.

9. $a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

10. $b^2 + (a+b)^2 = 2\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2$.

Livre VII.

Ce livre débute par ces vingt-deux définitions.

1. *Unité.* Chaque objet est *un*.

2. *Nombre.* Pluralité formée d'unités.

3. De deux nombres, le moindre est une *partie unique* du plus grand, lorsqu'il mesure exactement le plus grand.

4. De deux nombres, le moindre est une *partie multiple* du plus grand lorsqu'il ne le mesure pas exactement.

5. De deux nombres, le plus grand est un *multiple* du plus petit lorsqu'il en est exactement mesuré.

6. Nombre pair ($2a$).

7. Nombre impair ($2a+1$).

8. Nombre pairement pair ($4a$).

9. Nombre pairement impair ($4a+2$).

10. Nombre impairement impair $(2a+1)(2b+1)$.

11. Nombre premier qui n'est mesuré que par l'unité.

12. Nombres premiers entre eux qui n'ont que l'unité pour mesure commune.

13. Nombres composés (*abcd*...).

14. Nombres composés entre eux sont ceux qui ont un nombre pour mesure commune.

15. Un nombre multiplie un autre nombre quand ce-

lui-ci est ajouté autant de fois à lui-même que le premier contient d'unités.

16. Lorsque deux nombres se multiplient, le résultat se nomme *produit* ou *nombre-surface;* les nombres qui se multiplient se nomment *côtés* du produit.

17. Lorsque trois nombres se multiplient, le résultat ou le produit est *nombre-solide;* les nombres qui se multiplient en sont les *côtés*.

18. Nombres carrés.

19. Nombres cubes.

20. Des nombres sont *proportionnés* lorsque le premier est la même partie unique ou la même partie multiple du second que le troisième du quatrième.

21. Des nombres-surfaces aussi bien que des nombres-solides qui ont les côtés proportionnés sont semblables.

22. Un nombre *parfait* est celui qui est égal à toutes ses parties.

Viennent ensuite quarante et une propositions.

1. Etant donnés deux nombres inégaux et si l'on retranche toujours le plus petit du plus grand, sans que le reste mesure exactement le nombre précédent et jusqu'à ce que ce reste soit égal à l'unité, ces deux nombres sont premiers entre eux.

2. Trouver la plus grande commune mesure de deux nombres.

3. Trouver la plus grande commune mesure de trois nombres.

4. De deux nombres, le moindre est toujours une partie unique ou multiple du plus grand.

5 et 6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

7 et 8. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a $\frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b}$.

9 et 10. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

11. Si $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a}{c}$, on a $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

12. Si $a : b :: c : d$, on a $a : b :: a + c : b + d$.

13. Si $a : b :: c : d$, on a $a : c :: b : d$.

14. Si $a : b :: c : d$ et $b : e :: d : f$, on a $a : e :: c : f$.

15. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

16. $ab = ba$.

17. $ab : ac :: b : c$.

18. $ba : ca :: b : c$.

19. Si $a : b :: c : d$, alors $ad = bc$, et si $ad = bc$, alors $a : b :: c : d$.

20. Si trois nombres a, b, c sont proportionnés, alors $b^2 = ac$, et si $b^2 = ac$, les trois nombres sont proportionnés.

21. Si le rapport $\frac{a}{b}$ est donné dans les *plus petits nombres* et si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors a mesure c, et b mesure d.

22. Si $a : b :: c : d$; $b : e : f : c$, alors $a : e :: f : d$.

23. Si a et b sont premiers entre eux, le rapport $\frac{a}{b}$ est exprimé dans les plus petits nombres.

24. Lorsque le rapport $\frac{a}{b}$ est exprimé dans les plus petits nombres, a et b sont premiers entre eux.

25. Si a et b sont premiers entre eux, un nombre c qui mesure a est premier avec b.

26. Si deux nombres a, b sont premiers avec un troisième c, le produit ab est premier avec c.

27. Si deux nombres a, b sont premiers entre eux, alors a^2 est premier avec b.

28. Si deux nombres a, b sont premiers avec c et aussi avec d, alors ab et cd sont premiers entre eux.

29. Si deux nombres a et b sont premiers entre eux, a^2, b^2; a^3, b^3 sont aussi premiers entre eux.

30. Si deux nombres a et b sont premiers entre eux, $a+b$ est premier avec a et b.

31. Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas exactement.

32. Si le produit ab est mesuré par un nombre premier c, un des deux nombres a ou b est mesuré par c.

33. Tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier.

34. Tout nombre est un nombre premier ou mesuré par un certain nombre premier.

35. Etant donnés plusieurs nombres, trouver leurs rapports exprimés dans les plus petits nombres.

36. Etant donnés deux nombres, trouver le plus petit nombre qu'ils mesurent.

37. Un nombre a mesuré par les deux nombres c, d est aussi mesuré par leur plus petit multiple.

38. Etant donnés trois nombres, trouver le plus petit nombre qu'ils mesurent.

39 et 40. Si $a = mb$, alors $\frac{a}{m} = \frac{b}{1}$.

41 Trouver le plus petit nombre qui a pour parties $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, c'est-à-dire que s est divisible par a, b, c.

La suite prochainement.

PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE, DE DIOPHANTE.

(Livre V, page 33.)

Ce problème étant propre à donner une idée de l'esprit de la méthode de l'illustre Grec, nous allons, d'après Nesselmann, donner la traduction littérale du problème et de sa solution. L'énoncé du problème est en vers dans l'original.

Deux sortes de vin, l'un à 8 dragmes la mesure, l'autre moins bon à 5 dragmes seulement,
Voilà le mélange que prépara un bon maître pour ses serviteurs dans un festin.
Ce qu'il a payé pour les sortes était un nombre carré.
Si tu ajoutes encore 60 à ce carré,
Regarde, tu auras un second carré; maintenant remarque,
La racine (*de ce carré*) te montre combien l'autre a acheté de mesures;
Et maintenant dis-moi combien du meilleur vin
Et combien à 5 furent mêlés ensemble.

Le sens de cette épigramme est celui-ci : Quelqu'un a acheté deux tonneaux de vin ; de l'un la mesure coûte 8 dragmes et de l'autre 5 dragmes. Le prix qu'il paye pour le tout est un nombre carré, et si l'on y ajoute 60, ce sera encore un carré dont la racine indique le nombre total des mesures. Combien y avait-il de mesures à 8 dragmes, combien à 5 dragmes?

Soit le nombre total de mesures x, alors le prix est $x^2 - 60$ et $x^2 - 60$ doit être un carré; il fait la racine égale à x moins un certain nombre; mais $x^2 - 60$ est composé de deux nombres, et égal au prix du vin à 8 dragmes et au prix du vin à 5 dragmes. Le $\frac{1}{5}$ de celui-ci est le nombre des mesures à 5 dragmes et le $\frac{1}{8}$ de celui-là est le

nombre des mesures à 8 dragmes; mais comme le nombre des mesures de deux sortes doit être x, il s'agit donc de partager $x^2 - 60$ en deux nombres, de manière que le $\frac{1}{5}$ de l'un et le $\frac{1}{8}$ de l'autre fassent ensemble x. Cela n'est possible qu'autant que x est plus grand que $\frac{1}{8}$ de $x^2 - 60$ et plus petit que $\frac{1}{5}$ de $x^3 - 60$; ainsi $x^2 - 60$ sera plus grand que $5x$ et plus petit que $8x$. Comme $x^2 - 60$ doit être plus grand que $5x$, ajoutant de part et d'autre 60, x^2 doit être plus grand que $5x + 60$: ainsi x^2 est plus grand que $5x$ plus un nombre plus grand que 60; x sera donc plus grand ou du moins plus petit que 11. Ensuite comme $x^2 - 60$ est plus petit que $8x$, si l'on ajoute des deux parts 60, alors x^2 sera égal à $8x$ plus un nombre plus petit que 60, d'où il suit que x ne peut surpasser 12. Mais il a été montré que x ne peut pas être moindre que 11. Donc x sera plus grand que 11 et plus petit que 12. Mais si nous voulons rendre $x^2 - 60$ un carré, nous formons la racine de ce carré avec x moins un certain nombre et l'on obtient x en ajoutant 60 au carré de ce certain nombre et divisant la somme par le double de ce nombre (*). Nous devons donc chercher un nombre tel, que si l'on ajoute à son carré 60 et qu'on la somme par le double de ce nombre, le quotient doit être plus grand que 11 et plus petit que 12. Si l'on nomme x (**) le nombre cherché, alors $\frac{x^2 + 60}{2x}$ doit être plus

(*) $x^2 - 60 = (x - z)^2$, $x = \frac{z^2 + 60}{2z}$.

(**) Ne pas confondre cet x avec le précédent. Diophante n'a qu'un *seul* signe pour toute espèce d'inconnues. Cet x est le z de la note précédente.

grand que 11 et plus petit que 12 ; soit d'abord $\frac{x^2+60}{2x} > 11$, alors $x^2 + 60 > 22x$. Ainsi $22x$ est égal à x^2 plus un nombre moindre que 60, donc x ne peut être moindre que 19; ensuite on doit avoir $\frac{x^2+60}{2x} < 12$, donc $x^2 + 60 < 24x$; ainsi $24x$ est égal à x^2 plus un nombre plus grand que 60; conséquemment, x doit être plus petit que 21, mais il doit en outre être plus grand que 19. Ainsi, si nous voulons rendre $x^2 - 60$ un carré, il faut poser la racine égale à $x - 20$; de là on tire $x = 11\frac{1}{2}$, $x^2 = 132\frac{1}{4}$; soustrayant 60, il reste $72\frac{1}{4}$ (*) : il faut donc décomposer $72\frac{1}{4}$ en deux nombres tels, que le $\frac{1}{5}$ du premier plus le $\frac{1}{8}$ du second fassent ensemble $11\frac{1}{2}$. Supposons que le $\frac{1}{5}$ du premier soit x, alors le $\frac{1}{8}$ du second sera $11\frac{1}{2} - x$; les nombres eux-mêmes sont donc $5x$ et $92 - 8x$ et leur somme doit être $72\frac{1}{4}$, donc $x = \frac{79}{12}$: ainsi le nombre des mesures à 5 dragmes est $\frac{79}{12}$ et le nombre des mesures à 8 dragmes $\frac{59}{12}$; le reste est évident. Avec le symbolisme moderne la solution s'abrége, mais la logique reste la même. Il n'y a d'abréviation que dans l'écriture. Il fallait un génie transcendant pour découvrir cette logique sans le puissant auxiliaire du symbolisme.

(*) C'est le carré de $\frac{17}{2}$.

BIBLIOGRAPHIE.

Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal; par M. *F. Frenet*, ancien élève de l'Ecole Normale, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. Ouvrage destiné aux élèves de l'Ecole Polytechnique, à ceux de l'Ecole Normale et aux auditeurs des cours de mathématiques dans les Facultés des Sciences (*).

Je considère ce recueil comme un ouvrage des plus utiles et des mieux faits. Il contient, sous un volume restreint (220 pages), les solutions de plus de 500 questions qui se rapportent aux différentes théories du Programme de la Licence ès Sciences mathématiques. L'ouvrage se compose de trois parties, divisées chacune en deux sections. Dans la première section de chaque partie, on trouve les énoncés des questions à résoudre présentés dans un ordre méthodique; et dans la seconde, les solutions exposées d'une manière succincte, mais très-claire. Quant aux méthodes adoptées pour la résolution des questions principales, nous n'en dirons qu'un mot : c'est qu'elles appartiennent à des géomètres dont les noms font autorité.

Cet ouvrage n'a pas été destiné aux candidats à l'Ecole Polytechnique; nous croyons toutefois pouvoir leur recommander les paragraphes relatifs aux *dérivées* de différents ordres, à la recherche des *vraies valeurs*, aux questions de *maxima* et de *minima*, à la théorie des *tangentes*, des points *singuliers*, à la *construction des courbes*. G.

(*) Paris, Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire de l'École impériale Polytechnique, du Bureau des Longitudes, quai des Augustins, 55.

SUR L'ORTHOGRAPHE DU NOM DE NEPER

(voir Bulletin, t. Ier, p. 106).

Un abonné du Mans nous écrit que dans les ouvrages anglais destinés à la jeunesse le nom de l'inventeur des logarithmes est orthographié *Napier* et pas Neper. Même dans les ouvrages publiés par l'illustre Anglais, le nom est diversement écrit; cela tient à la capricieuse prononciation des voyelles chez les Anglais. La prononciation moderne est Napier, mais je crois qu'en France il faut conserver le nom de Neper attaché aux logarithmes népériens.

SUR LA NÉBULEUSE D'ORION.

Dans l'ouvrage suivant de Jean-Baptiste Cysat de Lucerne: *Mathemata astronomica de loco, motu, magnitudine et causis cometæ annorum* 1618 *et* 1616, Ingoldstadt, in-4, on lit à la page 75 :

Cæterum huic phænomeno similis stellarum congeries est in firmamento ad ultimam stellam gladii Orionis, ibi enim cernere est (per tubum) congestas iidem aliquot stellas angustissimo spatio et circumcirca interque ipsas sellulas instar albæ nubis candidum lumen affusum.

Ainsi Cysat a observé cette nébuleuse en 1619, au moins trente années avant Huyghens, qui passe pour l'avoir découverte en 1656.

C'est le savant directeur de l'observatoire de Berne, M. Rudolf Wolf, qui est l'auteur de cette curieuse correction, et qui prépare une Notice sur les œuvres et sur

la vie de Cysat (*Astronomische Nachrichten*, t. XXXVIII, n° 895, p. 110; 1854).

Cysatus est né à Lucerne en 1588, était professeur de mathématiques à l'université d'Ingolstadt, et est mort le 3 mars 1657. Il était fils de Rennward, historien de la Suisse. Cysat est un des premiers qui aient observé le passage de Mercure sur le Soleil.

SUR OTHON DE MAGDEBOURG

(voir Bulletin, t. Ier, p. 11).

Extrait d'une Lettre du prince Baldassarre Boncompagni.

Dans l'ouvrage de Kastner intitulé : *Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 604, on lit : « L. Valentini Othonis » Parthenopolitani de triangulis globi sine angulo recto » libri quinque, quibus tria meteoroscopia numeror. ac- » cesserunt. » Il faut remarquer que Valentinus Othon est appelé ici *Parthenopolitanus*, c'est-à-dire de *Parthenopolis*. Or *Parthenopolis* est le nom latin de la ville de Magdebourg d'Allemagne (*). En effet, dans le *Lexicon geographicum, in quo universi orbis Urbes, Provinciæ, Regna, Maria et Flumina recensentur. Illud primum in lucem edidit Philippus Ferrarius Alexandrinus, in Ticinensi Academia Mathematices professor. Nunc Michael Antonius Baudrand Parisinus Prior Commendatarius de Roboribus, de Novo-Mercato, et de Gessenis, hanc editionem emendavit, illustravit, et dimidia parte auctiorem fecit. Parisiis, apud Franciscum Muguet, Regis et Illustrissimi Archiepiscopi Parisiensis typogra-*

(*) Magdebourg signifie, en allemand, la ville des jeunes filles; c'est ce qu'exprime aussi en grec le mot Parthenopolis. Tr.

phum MDCLXX. *Cum privilegio Regis*, tome II, page 39, col. 1, on lit : « Parthenopolis item (ex antiquis urbis » Magdeburgensis monumentis, teste Munstero) Magdeburgum, urbs præclara Germaniæ, in Saxonia, ad Albim fluvium, libera et archiepiscopalis anno salutis » 941 effecta, inter Brunopolim ad occasum II et Berlinum ad ortum 16 leucis. Dicta est quod ibi Diana virgo » culta fuerit. Eadem Poetis Germanis Parthenope, et » Magdeburga dicitur. » Il paraît donc que Valentinus Othon était de Magdebourg et non pas de Naples.

THÉORÈMES

Sur les équations contenues dans le Ars magna de Cardan (1545).

(COSSALI, t. II, p. 325.)

---

1. m *étant une quantité qui vérifie l'équation, elle est divisible par* x — m.

Cardan connaît ce théorème pour le troisième degré et le démontre ainsi.

Soient

$$x^3 = px + q, \quad x^3 + m^3 = px + q + m^3;$$

$x^3 + m^3$ est divisible par $x + m$; le second membre donne pour quotient p et pour reste $m^3 - pm - q$, qui est zéro par hypothèse: de là Cardan déduit les deux autres racines. Mais il ne considère pas le cas où les trois racines sont négatives (*Pratica gener. aut.*, cap. LI).

2. *Le coefficient du deuxième terme est égal en grandeur à la somme des racines* (*Ars magna*, cap. XVIII).

Toujours appliqué seulement au troisième degré; il sait même que lorsque x^2 manque, la somme des racines positives est égale à la racine négative, ou la positive égale la somme des négatives. (*Et patet etiam quod omnes*

modii additionem semper referri possunt, quamvis minus, cum additur, vicem gerat plus, cum detrahitur.)

3. *Le dernier terme connu est le produit des racines.*

Cardan ne connaît pas ce théorème ; il a pourtant une foule d'exemples et de passages qui font voir qu'il avait un pressentiment non exprimé de ce théorème. Cela provient de l'usage du temps, qui ne permettait pas de transporter tous les termes dans un seul membre ; il fallait n'avoir que des termes positifs dans chaque membre, usage venu des Arabes.

Racines positives, négatives, imaginaires.

Il appelle les positives racines *vraies*, et les négatives racines *feintes*, *fausses*.

Cap. XVIII. *De regula falsum ponendi.* Il résout des problèmes où il adopte pour inconnue une quantité négative en posant l'inconnue égale à $-x$.

Racines réelles et imaginaires.

Cardan distingue deux genres de racines fausses, les *négatives* et les racines carrées des quantités négatives et un troisième qu'il explique obscurément, et on voit qu'il s'agit de $-a-\sqrt{-b}$ où les deux faussetés sont réunies ; il donne un exemple, mais dont le résultat est inexact.

Une équation de degré pair n'a aucune racine réelle ou en nombre pair.

Cardan connaît ce théorème pour les équations du second degré et ses derivées $x^{2m}+px^{m}=q$.

Une équation de degré impair a toujours un nombre impair de racines réelles.

Cardan connaît ce théorème pour le troisième degré ; il trouve que les équations

$$x^3+q=px,\quad x^3+px=q,$$

ont trois racines réelles si $\frac{4}{27}p^2 > q$ ou $= q$, et n'en ont qu'une si $\frac{4}{27}p^2 < q$.

$$x^3 + q = nx^2, \quad x^3 + nx^2 = q$$

ont trois racines réelles si $\frac{4}{27}n^2 > q$ ou $= q$, et une seule si $\frac{4}{27}n^2 < q$.

Relations entre le nombre des racines positives et négatives et les signes des termes.

Cap. I de l'*Ars magna*. Cardan dit que dans les équations

$$x^3 = px + q, \quad x^3 + px = q, \quad x^3 + nx^2 = q,$$
$$x^3 + nx^2 + px = q, \quad x^3 = nx^2 + px + q,$$
$$x^3 + nx^2 = px + y, \quad x^3 + px = q,$$

il n'existe qu'une seule racine réelle positive; et il change les racines positives en négatives, et *vice versâ*, en remplaçant x par $-x$. Il étend même ce théorème à

$$x^4 + mx^3 + nx^2 = q, \quad x^4 + mx^3 + nx^2 = px + q.$$

Cardan connaît la règle de Descartes pour le troisième et quatrième degré, quelques cas exceptés.

Racines égales.

Cardan, dans l'équation

$$x^3 = 12x + 16,$$

dit expressément qu'elle a deux racines égales $+2$, $+2$ et une racine fausse -4.

Transformation des équations.

Voici comment Cardan réduit la résolution de l'équa-

tion

$$x^3 + q = px$$

à celle de l'équation

$$z^3 = pz + q,$$

et *vice versâ*. On a

$$q = px - x^3 = z^3 - pz,$$

d'où

$$px + pz = z^3 + x^3, \quad p = z^2 - xz + x^2;$$

connaissant z, on connaît donc x, et *vice versâ*.

Résolution de Cardan des équations du troisième degré.

1°. $$x^3 + px = q,$$

comme et d'après Tartaglia.

2°. $$x^3 = px + q,$$

comme et d'après Tartaglia.

3°. $$x^3 + q = px,$$

la ramène à $z^3 = pz + q$.

4°. $$x^3 = nx^2 + q,$$

il fait $x = z + \frac{1}{3}n$ et revient à la forme $z^3 = pz + q$.

5°. $$x^3 + nx^2 = q,$$

il fait $x = z - \frac{1}{3}n$: ainsi $x = z^2 - n$; d'après Louis Ferraro.

6°. $$x^3 + q = nx^2,$$

il fait $x = \frac{\sqrt[3]{q^2}}{z}$.

7°. $$x^3 + nx^2 + px = q,$$

8°. $$x^3 + px = nx^2 + q,$$
9°. $$x^3 + nx^2 = px + q,$$
10°. $$x^3 = nx^2 + px + q,$$
11°. $$x^3 + q = nx^2 + px,$$
12°. $$x^3 + px + q = nx^2,$$
13°. $$x^3 + nx^2 + q = px.$$

Il fait partout disparaître le second terme.

Il ne traite pas ces trois cas :

$$x^3 + px + q = 0,$$
$$x^3 + nx^2 + q = 0,$$
$$x^3 + nx^2 + px + q = 0.$$

Cardan enseigne diverses transformations : Cap. XXI *Arithmetices : De permutatione capitulorum invicem;* Cap. VII, *De regulis algebraicis ; de capitulorum transmutatione.* Cap. XXVII.

1re *Transformation.* Il fait

$$x = y \pm a;$$

et s'en sert pour faire disparaître le terme px dans

$$x^3 + q = px.$$

2e *Transformation.*

$$x = \frac{a}{y} \text{ réciproque.}$$

3e *Transformation.* Soit l'équation

$$x^3 = nx^2 + q = px;$$

si a et b sont deux racines, l'équation

$$x^3 + kx^2 - (p - a - b)(k - n)\,x + q + ab\,(k - n) = 0$$

aura aussi les deux racines a et b, k est arbitraire.

Racines irrationnelles.

Cardan cherche quelles peuvent être les formes des équations du troisième et du quatrième degré qui ont pour racines les irrationnelles d'Euclide.

Binôme de troisième et de sixième espèce $\sqrt{t} \pm \sqrt{n}$.

Théorème I. $(\sqrt{s} \pm \sqrt{u})^{2m+1}$, tous les termes renferment $\sqrt{t}$ ou $\sqrt{u}$; $(\sqrt{t} + \sqrt{u})^{2m}$, tous les termes renferment $\sqrt{+u}$ ou bien sont rationnels.

Théorème II. $\sqrt{t} \pm \sqrt{u}$ ne peut être racine de

$$x^2 + px = q,$$

ni d'aucune équation du troisième degré, ni de l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 = r$$

ou

$$x^4 + px^2 + qx = r,$$

mais bien de l'équation

$$x^4 + px^2 = q$$

ou de l'équation complète

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx = s.$$

Il a d'autres théorèmes du même genre qui ne présentent plus aucun intérêt, et que Fibonacci avait déjà connus; mais il passe à des radicaux d'un degré beaucoup plus élevé. Il démontre que ni $\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{u}$ ni $\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$ ne peuvent être racines de l'équation

$$x^3 = px + q.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des Déterminants et leurs principales applications; par le D[r] *F. Brioschi,* professeur de mathématiques appliquées à l'université royale de Pavie. Traduit de l'italien, par M. *Edouard Combescure*, professeur de mathématiques. Paris, 1856; in-8 de XII-216 pages.

La géométrie segmentaire dite supérieure (*), la géométrie infinitésimale, les *déterminants*, les formes homogènes, le calcul des fonctions, des symboles, des nombres complexes, changeront complétement, dans peu d'années, la face de la science, non-seulement dans les hauteurs, mais aussi dans la plaine. Les théories principales étant autrement exposées, les formules principales autrement écrites, les résultats autrement énoncés, nos traités élémentaires auront à subir une tôtale transformation. Ceux qui par inertie ne veulent pas ou par caducité ne peuvent plus suivre, seront tentés de décrier, d'arrêter ce mouvement. Cela ne s'applique heureusement pas à ceux qui entrent dans la carrière. Ils accueillent avec reconnaissance tout ce qui prépare la voie aux nouvelles méthodes. Tel est l'ouvrage du célèbre analyste qui manie avec tant d'habileté, avec de si beaux succès, la féconde théorie des déterminants.

On part des définitions les plus simples et l'on arrive

(*) Puisse le retour à la santé du célèbre auteur de la géométrie supérieure lui permettre de nous donner le second volume si ardemment désiré.

aux applications les plus générales. Le nom de *déterminant,* réservé longtemps aux seules fonctions cramériennes, aux dénominateurs des inconnues dans les équations du premier degré, désigne aujourd'hui bien d'autres fonctions : on a les déterminants fonctionnels de Jacobi, les déterminants de Gauss, autrement dit *discriminants*, les déterminants de Hesse ou invariants, etc.

Ces diverses fonctions jouissent de propriétés spéciales, ont des relations mutuelles qui ont des conséquences nombreuses pour la géométrie, l'analyse des équations et le calcul des intégrales définies. Une graduation intelligente permet au lecteur de suivre sans peine ces divers développements. Nous engageons à prendre toujours pour exemple un déterminant formé d'un petit nombre de termes, d'y appliquer le raisonnement de l'auteur, qu'on étendra ensuite avec facilité à un nombre quelconque de termes, moyen d'étude à conseiller dans les méthodes d'une vaste généralité.

Ce qui n'est pas moins précieux dans cette production, c'est l'uniformité des procédés, la symétrie extrême des résultats, l'élégance des dispositions typographiques; ce sont des qualités mnémoniques qui, lorsqu'elles manquent, rendent les formules disgracieuses, les font oublier et les frappent de stérilité.

L'auteur italien a eu le rare bonheur de rencontrer un traducteur qui connaît, qui domine le sujet; pour s'en convaincre, il suffit de lire les deux Notes terminales qui font regretter qu'il n'en ait pas mis un plus grand nombre.

La France possède donc enfin un ouvrage, et il est le seul, où l'on peut apprendre la théorie la plus importante de toute l'analyse; c'est une lacune comblée, un service rendu. Un jour, j'énumérais devant un géomètre éminent de notre Académie des Sciences les endroits des ma-

thématiques où l'on rencontre des déterminants depuis les équations du premier degré jusqu'aux équations des perturbations planétaires; il m'interrompit en me disant que j'aurais plus tôt fait en désignant les endroits où l'on ne rencontre pas de déterminants.

Papiers de Descartes; par M. *Prouhet*.

(Extrait d'une Lettre à M. Terquem.)

Dans l'édition de M. Cousin, on donne au tome X un fac-simile de l'écriture du grand philosophe en disant que c'est la seule trace qui en reste. Que sont donc devenus ses manuscrits? D'après Baillet, les minutes de ses lettres avaient été apportées en France par M. Chanut et avaient servi, quoique bien altérées par un séjour au fond de l'eau (*), à faire l'édition de Clerselier. Quant aux originaux des lettres au P. Mersenne, d'abord tombés aux mains de Roberval qui n'avait voulu les communiquer à personne, ils étaient échus à Lahire qui en avait fait cadeau à l'Académie des Sciences. Ces Lettres paraissent avoir été remises à Baillet pour composer la vie de Descartes, et ensuite à un nommé J.-B. Legrand qui préparait une édition complète des œuvres du philosophe (Baillet, *Vie de Descartes*, préface, p. XXII). C'est probablement ce Legrand qui est l'auteur des notes marginales inscrites sur l'exemplaire de l'Institut, dont M. Cousin s'est servi. A partir de là, je perds la trace des manuscrits de Descartes. Quel est ce Legrand? Pourquoi n'a-t-il pas donné l'édition qu'il projetait? On trouverait peut-être quelques renseignements à ce sujet dans les anciens registres de l'Académie.

(*) Le bateau qui les apportait avait fait naufrage au port de l'École, et on n'avait pu les retirer que trois jours après.

Note du Rédacteur. Je répète qu'il serait fort utile de publier une Table des matières de l'édition Cousin. Celle qu'on y trouve est d'une maigreur inouïe, surtout pour la partie scientifique. Exemple : Vous y chercherez vainement les *ovales* de Descartes ; la Table des noms, qui facilite tant les recherches historiques, manque complétement. Que sont devenus les éditeurs tels que Baillet? Des œuvres volumineuses sans tables n'existent pas, non plus qu'une bibliothèque sans catalogue.

ARAIGNÉE PERTURBATRICE;

D'après M. HANSTEEN,
Directeur de l'observatoire de Christiania.

(*Astr. Nach.*, 1856, n° 1020, p. 191.)

Le Bureau des Longitudes avait fait établir à l'Observatoire de Paris une boussole consacrée exclusivement aux variations diurnes de la déclinaison. Dans le courant de 1819, le barreau d'acier qui était suspendu à plat, éprouva, *sans aucune cause apparente*, un changement subit de direction ; les variations diurnes se trouvèrent en même temps réduites presque au dixième de leur valeur primitive, tandis que l'intensité magnétique s'était considérablement accrue.

Le même fait, savoir une diminution subite dans la direction, les variations diurnes et dans le temps d'une oscillation, s'est aussi présenté une fois à Gauss dans l'observatoire magnétique de Gottingue et deux fois à M. Hansteen, à Christiania. Mais Gauss devina bientôt la cause. Une araignée s'était glissée dans la boîte *unifilaire*, et, par un fil très-fin presque invisible, avait lié l'extrémité de l'aiguille à la paroi de la boîte, ce qui changea subite-

ment la position moyenne de l'aiguille, de même que les mouvements diurnes et le temps d'une oscillation. Au lieu d'en déduire qu'un changement subit s'était produit dans le magnétisme terrestre et de là une augmentation dans le moment magnétique de l'aiguille, il se contenta d'ôter le couvercle, et faisant glisser un crayon le long des parois de la boîte, l'aiguille reprit aussitôt sa position ordinaire, et les variations et la durée d'oscillation revinrent à leurs grandeurs précédentes.

M. Hansteen découvrit de même le fil d'araignée qui avait produit les deux perturbations dans son observatoire. Le fil ôté, tout fut rétabli, et le célèbre directeur crut qu'il est plus vraisemblable qu'une même cause ait produit le même effet dans la boussole d'Arago.

SUR LE CIRQUE NUMÉRIQUE DES PYTHAGORICIENS.

On sait que le carré d'un nombre entier est la somme de deux nombres triangulaires consécutifs. Le pythagoricien Jamblique énonce ainsi ce théorème (p. 107) dans l'ouvrage cité (*Bulletin*, t. I, p. 186).

« L'unité est l'élément fondamental dans la génération
» des carrés.... Pour engendrer un carré, on part origi-
» nairement de l'unité comme de la *barrière* (ὕσπληγξ),
» en quelque sorte jusqu'à la *borne* (καμπτήρ) (*), côté
» du carré à engendrer, et puis on retourne de nouveau
» vers elle (l'unité) comme vers un but (νύσσα), en tou-
» chant tous les nombres et l'unité elle-même deux fois,
» excepté la borne, côté du carré à engendrer. »

(*) Le verbe grec καμπτω, je courbe, est l'origine de ces mots francais: *camus, camard, cambrure, chambre, chambranle, concamération, camérier, chambellan, camarade.*

La figure suivante éclaircit cette course numérique.

Barrière. 1...2...3...4...5..
: 6. *Borne*.
But.... 1...2...3...4...5..

La somme de tous ces nombres est 36 carré de la borne.

Il représente ainsi sous forme de *cirque* le nombre 100 carré de 10, puis aussi 1000, en prenant 10 pour barrière et pour *but;* les nombres étant 10, 20, 30, etc., et la borne est 100, etc.

Le véritable *cirque arithmétique* qui est le fondement de toute continuité numérique est celui-ci :

Imaginons une circonférence de rayon infini. Inscrivons le chiffre zéro sur un point de cette circonférence; par ce point et le centre menons une droite et inscrivons l'infini (∞) sur l'autre extrémité de ce diamètre. Concevons que sur la demi-circonférence à droite de ce diamètre on ait rangé toutes les quantités numériques possibles croissant par gradation de 0 à ∞, et de même sur la demi-circonférence à gauche; distinguons les quantités à droite par un signe quelconque, soit +, et les quantités à gauche par un autre signe, soit —; un point partant de zéro et se dirigeant vers + ∞ sera obligé de parcourir la demi-circonférence de — pour revenir à zéro, et l'on voit que + ∞ et — ∞ désignent le *même point;* de même que + 0 et — 0 : là est le principe de la continuité, et l'hyperbole en fournit un exemple élémentaire. Soient A et A′ les deux sommets, A le sommet à droite et A′ le sommet à gauche; désignons par AB, A′C respectivement les demi-branches au-dessus de l'axe focal, et A*b*, A′*c* les demi-branches au-dessous; un point A partant de A et se dirigeant vers B décrira cette demi-branche, et arrivé à l'extrémité de cette longueur infinie, il sera aussi sur l'extrémité de la branche A*c*′, et continuant son mou-

vement, il vient vers A′ et de là vers l'extrémité de A′C; il sera alors aussi à l'extrémité de Ab, et, continuant, il revient en A. L'équation polaire de la courbe, le centre pris pour pôle, fait parfaitement ressortir ce mouvement continu.

Il y a donc toujours deux chemins pour passer d'un nombre à un autre; par exemple, pour passer de $+2$ à $+1$, on peut se diriger vers zéro, on peut aussi se diriger vers ∞ et passer par cet infini et zéro pour arriver à 1: Jacobi fait souvent usage de ce dernier chemin pour conserver l'uniformité de direction. Soient, par exemple, les quatre nombres α, β, γ, δ rangés selon l'ordre ascendant; on va de α vers β, de β vers γ, de γ vers δ dans la même direction, et on conserve la même direction en allant de δ à α en passant par l'infini (*Fundamenta*, page 11). Ceci explique aussi le mouvement du point d'application de la résultante de deux forces parallèles $+P$, $-Q$, où P, d'abord plus grand que Q, décroît sans cesse, passe par zéro et devient négatif, et beaucoup d'autres mouvements de va-et-vient du même genre.

BIBLIOGRAPHIE.

Mélanges de Géométrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troisième ordre, etc., et la traduction du *Traité* de Maclaurin *sur les courbes du troisième ordre*; par M. *E. de Jonquières*, lieutenant de vaisseau. Paris, 1856; chez Mallet-Bachelier; in-8 de VIII-261 pages, avec planches. Prix : 5 francs.

M. de Jonquières est bien connu de nos lecteurs par

les excellents articles dont il a enrichi les *Nouvelles Annales*. L'ouvrage dont nous allons rendre compte ne peut qu'ajouter à la réputation de l'auteur et contribuera, nous l'espérons, à répandre le goût de la géométrie moderne.

L'auteur débute par une préface modeste, trop modeste peut-être si l'exemple pouvait être contagieux. Nous ferons remarquer à M. de Jonquières que la science, et l'on doit s'en féliciter, n'est pas la propriété d'une corporation : elle n'est pas indispensablement attachée à un diplôme ou à une position officielle : *Spiritus ubi vult spirat*. D'ailleurs M. de Jonquières se charge de nous prouver qu'on peut être excellent marin et bon géomètre.

Comme l'indique son titre, l'ouvrage est une collection d'études sur différents sujets. Chaque chapitre forme comme un traité à part.

Le *Chapitre Ier* (1-54) est consacré aux *propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps*. C'est le développement d'une théorie dont le programme seul a été donné par M. Chasles dans les *Comptes rendus* (26 juin 1843).

Le mouvement infiniment petit d'une figure plane se réduit à une rotation du plan de la figure autour d'une droite de ce plan, pendant que cette droite tourne elle-même autour d'un point fixe sans sortir de la position primitive du plan. La droite se nomme *caractéristique* et le point fixe *foyer*. La trajectoire du foyer est perpendiculaire au plan primitif qui contient les trajectoires des différents points de la caractéristique. Une droite D étant considérée comme faisant partie d'un corps, il existe une seconde droite Δ sur laquelle se trouvent les foyers de tous les plans menés par la première, et réciproquement. Un cas intéressant est celui où l'une des deux droites *conjuguées* est à l'infini.

A l'aide de ces considérations et par les démonstrations

les plus simples, l'auteur parvient à ce théorème que *le mouvement infiniment petit d'un corps se réduit à un mouvement de rotation autour d'un axe, qui pendant cette rotation glisse sur lui-même;* ou, en d'autres termes, *au mouvement d'une vis dans son écrou.* Le géomètre qui le premier a tracé cette belle image du mouvement, a pu dire avec un légitime orgueil : *Anch'io sono pittore.*

De ces principes fondamentaux, l'auteur déduit toutes les propriétés, soit descriptives, soit métriques, relatives aux trajectoires des points d'un corps en mouvement. Il rattache la théorie des figures en mouvement à celle des figures corrélatives, et montre ensuite les analogies qui existent entre les rotations d'un corps autour de divers axes et les systèmes de forces. C'est le propre des bonnes théories de n'être point isolées dans leur objet et d'ouvrir à l'esprit des horizons nouveaux. Ajoutons que c'est la plus grande jouissance que procure leur étude.

Le *Chapitre II* (55-112) est relatif *aux arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable et aux propriétés des arcs égaux de la lemniscate.* Les théorèmes qu'on y rencontre ont été énoncés sans démonstration par M. Chasles.

L'auteur nomme associés les arcs dont la différence est rectifiable, dénomination que l'on doit préférer à celle d'arcs semblables. Il commence par démontrer ce théorème :

1°. *Quand deux arcs d'une section conique sont associés, les sommets de leurs angles circonscrits sont situés sur une seconde conique décrite des mêmes foyers que la première;* 2° *et la différence des deux arcs est égale à la somme des côtés de l'angle circonscrit au premier, moins la somme des côtés de l'angle circonscrit au second.*

Le raisonnement de M. de Jonquières, en ce qui concerne la première partie de cet énoncé, ne nous a pas paru à l'abri de toute objection. L'auteur montre que si le théorème n'avait pas lieu, on pourrait rectifier un arc elliptique, *ce que l'on sait être impossible*. Nous ferons remarquer que si la rectification *indéfinie* de l'ellipse est impossible, c'est-à-dire si l'on ne peut exprimer une intégrale elliptique de deuxième espèce en fonction explicite de l'amplitude ou du module, à l'aide des seuls signes algébriques, exponentiels et logarithmiques (*), il n'en est pas de même de la rectification d'un arc déterminé; car l'impossibilité d'intégrer en général une fonction n'empêche pas qu'on puisse l'intégrer entre certaines limites particulières.

Quoi qu'il en soit, si l'on se contente de dire que les arcs assujettis aux conditions indiquées plus haut ont leur différence rectifiable, il reste encore un fort beau théorème que l'analyse transcendante avait seule abordé, mais en le présentant sous une forme moins simple et moins élégante. La méthode purement géométrique, appliquée à cet ordre de questions, présente des avantages incontestables. « Elle est la même pour les trois courbes qui exigent, en analyse, des formules et des calculs différents; elle fait connaître des relations immédiates et fort simples entre les arcs comparés, relations restées inaperçues jusqu'ici : elle conduit à diverses propriétés de ces arcs, d'autant plus curieuses, qu'il y entre des relations de périmètres et des conditions de maximum et de minimum, qu'on sait être presque toujours difficiles à traiter, même par l'analyse; enfin cette marche synthé-

(*) Voir *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, p. 441. M. Liouville est, je crois, le premier et le seul qui ait démontré ce théorème.

tique a encore ici un avantage particulier, c'est qu'elle s'applique aux coniques sphériques, sujet d'un ordre plus relevé sous le point de vue analytique » (*).

On peut donc considérer la théorie actuelle comme une conquête de la géométrie sur l'analyse, heureuse conquête qui n'appauvrit pas l'analyse et qui enrichit la science.

Le *Chapitre III* (113-152) a pour objet la généralisation des propriétés des foyers et des diamètres conjugués des sections coniques.

La première généralisation a pour principe le théorème suivant :

Etant donnée une conique A et étant pris un point fixe S dans son plan, on peut mener par ce point, d'une infinité de manières, deux droites telles, que le pôle de l'une soit sur l'autre. Ces deux droites sont toujours en direction deux diamètres conjugués d'une certaine conique Σ qui est relative au point S, qui change de forme quand on passe à un autre point et qui devient un cercle quand le point S est un des foyers. Au point S correspond un second point S′ situé sur le même diamètre de la courbe A, mais de l'autre côté et à égale distance du centre, et la conique Σ est aussi relative à ce point.

Les points S et S′ sont désignés sous le nom de foyers de la conique A relatifs à la conique Σ.

De là résulte une théorie générale dont celle des foyers proprement dits n'est plus qu'un cas particulier, et par théorie il faut entendre non-seulement l'ensemble des théorèmes relatifs aux foyers proprement dits, mais encore les propositions non moins nombreuses qui se rapportent aux coniques homofocales.

Le défaut d'espace nous oblige à indiquer seulement l'objet des autres chapitres.

(*) *Comptes rendus*, t. XVII, p. 839.

Le *Chapitre IV* (152-196) traite du principe de correspondance anharmonique et de ses applications aux courbes du deuxième, troisième et quatrième ordre.

Le *Chapitre V* (197-261) est consacré tout entier à la traduction du *Traité* de Maclaurin *sur les courbes du troisième ordre*. Cette traduction fidèle et élégante est accompagnée de notes qui ne laissent rien à désirer pour l'intelligence du texte.

En résumé, M. de Jonquières a fait un livre excellent. Nous le recommandons vivement à nos collègues et aux élèves intelligents qui, par une curiosité bien naturelle à leur âge, veulent savoir s'il y a quelque chose au delà des *Programmes*. Au delà, en effet, il y a tout un monde, et ce que nous avons de mieux à faire, ne pouvant les y conduire, c'est de leur indiquer un bon guide.

E. Prouhet.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉ POUR 1858.

(Académie des Sciences de Paris.)

Soit la suite naturelle des nombres premiers impairs

$$1.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31, \ldots;$$

désignons le $n^{ième}$ terme de cette suite par $P_{(n)}$; prenons dans cette suite $n-1$ termes dans un ordre quelconque. Pour fixer les idées, soit

$$n = 7,$$

ainsi

$$P_7 = 17.$$

Prenons donc dans cette suite $(n-1)$ ou six termes quel-

conques, par exemple

$$3.13.19.31.59.101,$$

et $P_{(6)} = 13$.

Si dans la progression arithmétique quelconque

$$A - C, \quad 2A - C, \quad 3A - C, \quad 4A - C, \ldots,$$

A et C étant premiers entre eux, on prend $P_{(n-1)}$ termes consécutifs, et dans l'exemple treize termes consécutifs, il faut démontrer qu'*au moins* un de ces termes ne sera divisible par aucun des six nombres premiers ci-dessus.

Soient

$$A = 5, \quad C = 3;$$

la progression est

$$2.7.12.17.22.27\ldots.$$

Prenons treize termes consécutifs

$$12.17.22.27.32.37\ldots\ 62.$$

17, nombre premier, n'est divisible par aucun des six nombres premiers. Il y a donc un terme non divisible par 1, 3, 5, 7, 11, 13, les six premiers nombres de la suite des nombres premiers. (Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, p. 76, édit. 1830.)

NUMÉRATION DES GRECS.

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Les mêmes lettres avec le iôta souscrit prennent une va-

leur mille fois plus grande. Ainsi ͵α, ͵β, ͵γ, etc., désignent 1000, 2000, 3000, etc.; ce sont les χιλιοὶ; ͵ι, ͵κ, ͵λ, etc., désignent 10000, 20000, 30000, etc., ou les χιλιαδικαὶ; et ͵ρ, ͵σ, ͵τ, etc., représentent 100 000, 200 000, 300 000, etc. La valeur de chaque caractère peut être augmentée dix mille fois en plaçant au-dessous la lettre M, initiale du mot Μυριὰ. Ainsi $\underset{M}{\rho}$ désigne un million.

Une autre manière de présenter les grands nombres est de placer des *points* sur la lettre. Ainsi $\ddot{\alpha}$ exprime 10 000; c'est le commencement de la série des myriades : μυριονταδικαὶ απλαὶ; et $\overset{::}{\alpha}$ dénote 100 millions et commence la série des μυριονταδικαὶ διπλαὶ ou les carrés des termes de la première série. Ainsi les Grecs auraient écrit 3 280 196 529

$\overset{::}{\lambda}.\overset{::}{\beta}\ \ddot{\eta}.\ddot{\iota}.\ddot{\theta}.\varsigma.\varphi.\kappa.\theta.$

Μυριαδικων διπλων λβ; μυριαδικων απλων ηιθ; καὶ εξακισ χιλιαι πεντακοσια εικοσὶν εννεα. (Leslie, *Philosophy of Arithmetic*, p. 219.)

Le signe ϛ se nomme *vau* ou επισημον.

Le signe ϟ se nomme *kopha* (κοφη); il ne faut pas le confondre avec le sigma final, ni avec la double lettre *sti*, ς.

Le signe ϡ se nomme *sampi*.

Ces trois noms sont empruntés à l'alphabet hébreu ainsi que tous les noms de l'alphabet grec.

Les fractions ayant pour numérateur l'unité étaient désignées par le dénominateur avec un accent à droite; ainsi δ′ est $\frac{1}{4}$, γ′ $\frac{1}{3}$, etc.; mais la fraction $\frac{1}{2}$ avait quatre signes spéciaux C, <, C′, K.

Dans les autres cas, on écrivait le dénominateur comme nous faisons pour les exposants. Ainsi $\beta^{\iota\alpha}$ désigne $\frac{2}{11}$, $\pi\alpha^{\rho\kappa\alpha}$ est $\frac{81}{121}$.

LOUIS-AUGUSTIN CAUCHY.

Né à Paris le 21 Août 1789; mort et enterré à Sceaux le 23 Mai 1857.

L'Académie a perdu une de ses plus brillantes couronnes, la France une de ses plus pures gloires, le monde le plus grand mathématicien du moment actuel. Mathématicien dans le sens le plus large, l'esprit de Cauchy n'était pas cantonné dans un coin de la science. Partout il fondait, partout il créait, partout il était au premier rang. A l'instar des éminents génies en toute carrière, les chefs-d'œuvre de Cauchy, ses plus belles découvertes datent de sa jeunesse. Son théorème sur les polyèdres, que tant de siècles ont laissé sans démonstration, complète la géométrie d'Euclide. Il établit la vérité d'un théorème de Fermat, qui a rebuté un Descartes, résisté aux efforts d'un Euler, d'un Gauss. Avant Sturm, il indique un moyen, compliqué il est vrai, mais certain, de trouver le nombre des racines comprises entre deux limites désignées. Il remanie, enrichit considérablement la théorie des déterminants, des fonctions alternées : théorie entamée par Vandermonde et Laplace. Ses considérations morphologiques sont un point de départ pour les travaux d'Abel sur les formes, permettent à l'illustre Norwégien d'établir l'impossibilité de la résolution générale des équations. Euler, Laplace, Lagrange faisaient quelquefois des séries un emploi d'une légitimité douteuse. Cauchy donne aux séries, lors même qu'elles sont impliquées d'imaginaires, des bases certaines. Sa théorie des modules jette une vive lumière sur le champ, d'une si luxuriante fécondité, des expressions imaginaires.

les excellents articles dont il a enrichi les *Nouvelles Annales*. L'ouvrage dont nous allons rendre compte ne peut qu'ajouter à la réputation de l'auteur et contribuera, nous l'espérons, à répandre le goût de la géométrie moderne.

L'auteur débute par une préface modeste, trop modeste peut-être si l'exemple pouvait être contagieux. Nous ferons remarquer à M. de Jonquières que la science, et l'on doit s'en féliciter, n'est pas la propriété d'une corporation : elle n'est pas indispensablement attachée à un diplôme ou à une position officielle : *Spiritus ubi vult spirat*. D'ailleurs M. de Jonquières se charge de nous prouver qu'on peut être excellent marin et bon géomètre.

Comme l'indique son titre, l'ouvrage est une collection d'études sur différents sujets. Chaque chapitre forme comme un traité à part.

Le *Chapitre Ier* (1-54) est consacré aux *propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps*. C'est le développement d'une théorie dont le programme seul a été donné par M. Chasles dans les *Comptes rendus* (26 juin 1843).

Le mouvement infiniment petit d'une figure plane se réduit à une rotation du plan de la figure autour d'une droite de ce plan, pendant que cette droite tourne elle-même autour d'un point fixe sans sortir de la position primitive du plan. La droite se nomme *caractéristique* et le point fixe *foyer*. La trajectoire du foyer est perpendiculaire au plan primitif qui contient les trajectoires des différents points de la caractéristique. Une droite D étant considérée comme faisant partie d'un corps, il existe une seconde droite Δ sur laquelle se trouvent les foyers de tous les plans menés par la première, et réciproquement. Un cas intéressant est celui où l'une des deux droites *conjuguées* est à l'infini.

A l'aide de ces considérations et par les démonstrations

les plus simples, l'auteur parvient à ce théorème que *le mouvement infiniment petit d'un corps se réduit à un mouvement de rotation autour d'un axe*, *qui pendant cette rotation glisse sur lui-même*; ou, en d'autres termes, *au mouvement d'une vis dans son écrou*. Le géomètre qui le premier a tracé cette belle image du mouvement, a pu dire avec un légitime orgueil : *Anch'io sono pittore*.

De ces principes fondamentaux, l'auteur déduit toutes les propriétés, soit descriptives, soit métriques, relatives aux trajectoires des points d'un corps en mouvement. Il rattache la théorie des figures en mouvement à celle des figures corrélatives, et montre ensuite les analogies qui existent entre les rotations d'un corps autour de divers axes et les systèmes de forces. C'est le propre des bonnes théories de n'être point isolées dans leur objet et d'ouvrir à l'esprit des horizons nouveaux. Ajoutons que c'est la plus grande jouissance que procure leur étude.

Le *Chapitre II* (55-112) est relatif *aux arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable et aux propriétés des arcs égaux de la lemniscate*. Les théorèmes qu'on y rencontre ont été énoncés sans démonstration par M. Chasles.

L'auteur nomme associés les arcs dont la différence est rectifiable, dénomination que l'on doit préférer à celle d'arcs semblables. Il commence par démontrer ce théorème :

1°. *Quand deux arcs d'une section conique sont associés, les sommets de leurs angles circonscrits sont situés sur une seconde conique décrite des mêmes foyers que la première*; 2° *et la différence des deux arcs est égale à la somme des côtés de l'angle circonscrit au premier, moins la somme des côtés de l'angle circonscrit au second.*

BIBLIOGRAPHIE.

Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales par un procédé nouveau, et nouvelles propriétes des périodes; par M. *Auguste Bouché,* professeur à Angers.

Cette intéressante brochure montre que les sujets en apparence les plus épuisés présentent souvent quelque chose de nouveau à celui qui les étudie à fond.

Dans la première partie, l'auteur fait voir comment on peut calculer les chiffres de la période par un procédé plus facile que celui de la division ordinaire; voici le principe dont il fait usage :

Soit une fraction ordinaire de la forme $\frac{1}{N}$, où l'on a calculé k chiffres décimaux par le procédé connu; le quotient et le reste seront $\frac{x}{10^k}$ et $\frac{y}{10^k}$, ce qui donne

$$1 = N.\frac{x}{10^k} + \frac{y}{10^k},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x}{10^k}}{1 - \frac{y}{10^k}},$$

c'est-à-dire que la fraction $\frac{1}{N}$ est équivalente à la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $\frac{x}{10^k}$, et la raison $\frac{y}{10^k}$.

L'auteur emploie cette propriété pour calculer autant de chiffres qu'on veut de la fraction périodique.

Dans la seconde partie, l'auteur établit sur l'ordre que suivent les chiffres des périodes simples et mixtes, plusieurs théorèmes ingénieux dont il faut voir le développement dans sa brochure même. Il est guidé au milieu de ses calculs par le procédé qu'il a déjà fait connaître dans une autre brochure intitulée *Nouvelle preuve des opérations de l'Arithmétique* (*voir* t. II, p. 140), et il insiste de nouveau sur la nécessité de vérifier les calculs en même temps qu'on les effectue. HOUSEL.

ODE

A MONSIEUR LE GENDRE,

Étudiant en mathématiques au collége Mazarin,

A l'occasion de sa thèse, soutenue en présence de l'Académie royale des Sciences, qui en avait accepté la dédicace.

.. Sunt hic etiam sua præmia laudi.
(VIRGILE.)

Nous croyons faire plaisir en réimprimant cette pièce très-rare. En 1770, l'Académie a honoré un intelligent écolier, pourquoi en 1857 retient-elle l'éloge dû à l'illustre géomètre?

Qu'aux pieds de la grandeur une Muse vénale
Dépose son hommage et brûle son encens :
Je brave dans ses dons la fortune inégale,
Je chante les talents.

J'applaudis ton élève, ô sublime Uranie ;
Viens placer sur son front la couronne des arts :
Sans titres fastueux, il ne doit qu'au génie
L'honneur de tes regards.

Si ta Cour en ces lieux avec toi le contemple,
Ce n'est pas pour sourire à l'orgueil d'un Crésus;
Tes Ministres sacrés ne quittent point ton Temple
Pour l'Autel de Plutus.

Ces hommes courageux, nés pour régir le monde,
Voudroient perpétuer l'amour de leurs travaux;
Enfanter tout à coup une race féconde
De successeurs nouveaux.

Toi, leur fils adoptif, que ce projet enflamme,
Renonce pour jamais à la frivolité :
La retraite et l'étude élèveront ton âme
Jusqu'à la vérité.

Pour soutenir tes pas dans un sentier pénible,
De tes guides hardis observe les efforts;
De l'émulation vois l'ardeur invincible
Déployer ses ressorts.

Loin des cris insultants de l'altière ignorance,
Ces Sages réunis au Palais de nos Rois,
Méditent à l'envi, dans la paix du silence,
La Nature et ses lois.

L'un, armé du compas, de l'art profond d'Euclide
Veut étendre l'empire et reculer les bords :
D'une courbe nouvelle à son calcul rapide
Il soumet les rapports.

L'autre, à l'aide du prisme, éclairant l'analyse,
De son œil étonné corrige les erreurs :
De l'écharpe d'Iris, il assemble ou divise
Les riantes couleurs.

Celui-ci s'élançant vers la céleste voûte
Mesure ce foyer qui nous verse le jour;
Ou d'un astre effrayant fait découvrir la route
Et fixer le retour.

Plus humble dans son vol, sans être moins utile,
Celui-là de la terre ouvre les fondements;
Et sa main tour à tour de l'or et de l'argile
Pèse les éléments.

Chacun sur les objets dont le charme l'entraîne,
Ne cesse d'appliquer ses avides esprits :
D'un procédé savant on retrouve la chaîne
Dans de mâles écrits.

A l'aspect de ce corps dont la France s'honore,
Je vois fuir à grands pas les préjugés nombreux;
Et la raison plus libre a préparé l'aurore
D'un changement heureux.

A mes yeux se présente une liste immortelle.
Quels noms fameux j'ai lus! d'Alembert et Buffon!....
Et vous, que ce Portique aujourd'hui nous rappelle,
La Caille et Varignon!

Du fond de leur tombeau, j'entends une voix sombre,
Qui crie à leur disciple : « Ose nous imiter :
» Comme nous, loin du monde, enseveli dans l'ombre,
» Apprends à méditer.

» Sans crainte et sans espoir, pour servir tes semblables,
» Marche dans le chemin que nous t'avons frayé;
» Si tu peux t'assurer des amis véritables,
» Tu seras trop payé. »

Par M. Cosson,
Professeur au collége Mazarin.

Permis d'imprimer, ce 23 juillet 1770,
De Sartine.

De l'imprimerie de L.-F. Delatour.

Je dois à l'intérêt que le célèbre académicien M. Bienaymé porte aux sciences les renseignements suivants puisés aux archives de l'Académie.

La thèse de Le Gendre, ou plutôt les thèses, forment un petit in-4 de 32 pages dont trente cotées et deux de titre ou de dédicace, car il n'existe pas de titre proprement dit.

Il n'y a sur le premier recto que ces mots :

REGIÆ SCIENTIARUM ACADEMIÆ.

Sur le verso : *Has Theses, Deo dante, propugnabit Adrianus M. Le Gendre, Parisinus, Auditor Josephi F.-M. Marie, Lic. Theol. Soc. Sorb. Cens. Reg. et Matheseon professoris.*

Die vigesima-quintâ Julii, ab hora post meridiem tertiâ ad vesperam.

PRÆSENTIBUS, FAVENTIBUS, AUSPICIBUS, *illustrissimis Regiæ scientiarum Academiæ Viris.*

En bas, en gros caractères : *In Mazarinæo, anno* M.DCC.LXX.

Sur la première page cotée 1 se trouve l'inscription suivante, en haut du texte qui commence sur cette même page :

Theses mathematicæ ex Analysi, Geometria et Mecanica excerpta.

Au bas de la dernière page, cotée 30 : *Typis L.-F. Delatour.*

Voilà pour l'extérieur des thèses. Quant à l'intérieur, ce sont bien des *excerpta.* Il n'y a que les énoncés de ce que le candidat démontrera, prouvera, etc. Les lignes sont fort serrées et la matière est abondante : mais c'est seulement matière d'examen. Il ne semble pas qu'il y ait un mot de neuf. C'est sans doute le programme de ce qui a dû être enseigné par un professeur habile à un élève in-

telligent. Il est possible qu'en 1770 un élève ne trouvât pas tous ces matériaux réunis et qu'il lui fallût les chercher dans les volumes où ils étaient dispersés. Mais précisément c'était l'usage du professeur de mathématiques transcendantes d'indiquer tous les Mémoires à consulter, et cela se continua au moins jusque vers 1815, même après les ouvrages de Lacroix.

J'ai parcouru les thèses, et cette lecture m'a si peu intéressé, que je suppose qu'elle n'intéressera guère plus vos lecteurs, à moins toutefois que l'on n'ait un point de comparaison, par exemple le plan des études de ce temps-là, ou bien les ouvrages de l'abbé Marie que je n'ai pas sous la main. Ces thèses n'offrent aucune découverte : l'élève répondra sur les parties des mathématiques pures et de la mécanique, au delà des éléments, puisqu'il commence par les équations du troisième et du quatrième degré et les racines égales, et qu'il présente même du calcul intégral : mais il ne monte pas très-haut. C'était peut-être beaucoup pour le temps. L'élève paraît au fait de toutes les bonnes méthodes de MM. Euler, Lagrange, etc., bien qu'il ne les nomme pas. Cela doit prouver pour le professeur. Il fallait que ce professeur fût tout à fait tourné à l'analyse moderne.

Quant à la présence de l'Académie à ces thèses, rien n'indique que ce fût autre chose qu'une faveur adressée au professeur et nullement à l'élève. Voici ce que j'ai découvert dans les registres de l'Académie.

Du 23 *mai* 1770. — Rapport de MM. de Lalande et Bailly sur les *Leçons de Mathématiques* de M. l'abbé de La Caille, avec des *Additions* de M. l'abbé Marie, professeur au collége Mazarin. — On le loue de n'avoir pas confondu ses additions dans le texte. On dit que l'Académie connaît ces excellents *Éléments*, et le Rapport finit ainsi : « Nous » croyons que cette nouvelle édition est très-digne d'être

» imprimée comme les précédentes sous le privilége de
» l'Académie. »

Du 13 *juin*.— « M. l'abbé Marie, successeur de M. l'abbé
» La Caille au collége Mazarin, est entré. Il a présenté un
» exemplaire de sa nouvelle édition des *Leçons de Ma-*
» *thématiques* de M. l'abbé de La Caille. Il a proposé de
» dédier à l'Académie une thèse de mathématiques qu'il
» veut faire soutenir et dont il a lu le projet. Ce qui lui
» a été accordé. »

Du samedi 21 *juillet*.— « M. l'abbé Marie, professeur
» de mathématiques au collége Mazarin, est entré avec
» M. Le Gendre, son écolier, et ils ont présenté une thèse
» dédiée à l'Académie que ce dernier soutient mercredi.
» L'Académie y assistera et s'assemblera chez M. le
» grand maître à trois heures et demie.

Du 1er *août*. — « MM. l'abbé Marie et Le Gendre
» sont entrés et ont remercié l'Académie de ce qu'elle
» a bien voulu assister à la thèse soutenue par ce der-
» nier. »

Pas un mot d'approbation pour l'*écolier*. Cependant on doit conclure qu'il avait bien défendu sa thèse, ou plutôt son exercice du mercredi soir 25 juillet, puisqu'il venait remercier le mercredi 1er août.

Je conjecture que tout l'intéret de la chose venait de la grande jeunesse de l'auteur; car Le Gendre, né en 1752, n'avait alors que dix-huit ans.

Note du Rédacteur. Le mot *Parisinus* indique que Le Gendre était Parisien. Lors de son élection à l'Académie en 1783, les registres portent qu'il est né à Paris, indication qui sans doute était dictée par lui-même. Il est né le 18 septembre 1752 et mort à Auteuil, où il est enterré, le 9 janvier 1833. On ignore d'après quels renseignements la *Biographie universelle Michaud* assigne Toulouse pour lieu de naissance.

Depuis 1792, pour faire disparaître une apparence *féodale*, on a écrit *Legendre*. Aujourd'hui la direction est inverse : *Tempora mutantur et nomina in illis*.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, par M. *Sturm*, membre de l'Institut; publié d'après le vœu de l'auteur par M. *E. Prouhet*, professeur de Mathématiques. Tome Ier. Paris, 1857; in-8 de XVI-409 pages. Prix des 2 volumes : 12 francs. (Chez Mallet-Bachelier, libraire.)

Il n'y a guère plus d'un an que Sturm a été enlevé aux sciences dans la maturité de l'âge et dans la force de son génie. Aux regrets universels que cette perte si grande et si inattendue a excités, se joignait la crainte que des Mémoires manuscrits, des recherches ébauchées, fussent égarés ou oubliés. Heureusement une sœur dévouée a conservé avec soin des fragments précieux, et un éminent géomètre, M. Liouville, a promis de les faire connaître aux savants. Sturm s'occupait à la fin de sa vie de mettre une dernière main aux feuilles de ses cours de l'Ecole Polytechnique qu'il se proposait de publier; ces feuilles, rédigées par les élèves les plus distingués, reproduisent fidèlement la méthode et les démonstrations du maître, mais elles laissent subsister des répétitions inévitables dans l'enseignement oral, des négligences de rédaction, des inexactitudes de calcul, etc.; l'impression n'en était possible qu'après une révision sévère, des corrections nombreuses, des vérifications de formules, des additions pour suppléer aux lacunes. M. Prouhet, dont les travaux

comme géomètre sont bien connus, n'a pas hésité à accepter la tâche pénible d'une publication qui exigeait autant de patience que de sagacité : le premier volume, que nous avons sous les yeux et qui renferme le calcul différentiel et une partie du calcul intégral, nous prouve qu'il l'a remplie avec un plein succès.

Le programme de l'enseignement du calcul infinitésimal est resté à peu près invariable à l'Ecole Polytechnique depuis un demi-siècle. Les questions qu'il renferme constituent un cours élémentaire distribué dans un ordre logique ; les géomètres d'un mérite supérieur qui l'ont successivement professé, ont contribué d'une manière sensible au perfectionnement des méthodes d'exposition de cette branche de l'analyse. Sturm, qui a enrichi la science de découvertes immortelles, a voulu aussi la servir en léguant à ceux qui cultivent les mathématiques le fruit de son expérience, acquise pendant un professorat de plus de vingt années. Ajoutons qu'il avait, par une rare exception, toutes les qualités nécessaires pour écrire avec perfection un ouvrage didactique, qualités que ne possèdent pas toujours les esprits originaux et inventifs. Il apportait à ses leçons le zèle le plus consciencieux, préparant avec soin ses démonstrations, l'ordre de ses calculs et s'efforçant à rendre lumineux les points difficiles. Penseur profond, il avait au plus haut degré la faculté de creuser un sujet et de l'envisager sous toutes ses faces ; aussi arrivait-il presque toujours à des démonstrations brèves, élégantes, non surchargées de calculs, frappantes d'évidence.

S'il est vrai, comme le rappelle M. Prouhet dans l'intéressante Notice qui sert d'introduction à l'ouvrage, que les auditeurs écoutaient la parole du maître avec le respect que le génie inspire, il faut ajouter qu'ils profitaient autant en étudiant les feuilles incomplètes conservées à

l'Ecole, et dont ils admiraient la clarté et la simplicité. Sturm n'a pas voulu parer ou déparer son ouvrage par des considérations philosophiques vagues et prétentieuses ou par des aperçus métaphysiques qui simulent la profondeur et ne portent que les ténèbres. Il se contente d'établir avec concision, netteté et sans équivoque les notions saisissables par les esprits bien faits et à fixer le sens précis des vérités fondamentales. Dans son exposition, il adopte la méthode des limites, que quelques exemples bien choisis rendent lumineuse. La différentiation des fonctions à plusieurs variables rappelle quelques formes des feuilles d'Ampère. Les leçons sur les séries, sur le développement des fonctions, sur la courbure des lignes, présentent dans un cadre resserré un ensemble aussi complet que substantiel. Deux leçons élégantes sur les expressions imaginaires renferment tout ce qu'il est utile de savoir sur cet important sujet. Rien n'est omis. Les difficultés qui ont été un sujet de discussion entre Euler et d'Alembert, relativement aux logarithmes des quantités négatives, sont résolues de la manière la plus simple; enfin des considérations très-fines montrent la légitimité de l'induction, lorsqu'on passe des relations entre des quantités réelles aux mêmes relations entre des imaginaires.

Le livre de Sturm porte partout le cachet de son esprit profond, rigoureux et original. Il restera dans l'enseignement comme un guide excellent pour tous ceux qui voudront être initiés le mieux et le plus vite possible à la connaissance de l'analyse infinitésimale. En le parcourant, nous nous sommes souvent demandé si le moment n'était pas venu d'introduire dans les éléments la méthode et la notation différentielle dans ce qu'elles ont de plus simple. Par ce moyen, on supprimerait une foule de procédés indirects, particuliers et souvent difficiles, dont on fait usage pour les questions des maxima,

des tangentes, des quadratures, questions non-seulement indispensables dans l'étude de l'algèbre, de la physique, de la mécanique, mais aussi dans les applications pratiques dont on s'occupe beaucoup aujourd'hui (*).

Les professeurs, tous ceux qui cultivent et qui aiment les mathématiques sauront gré à M. Prouhet des soins qu'il s'est donnés pour éditer les œuvres classiques d'un des géomètres les plus originaux de notre époque. Les amis de Sturm seront à jamais reçonnaissants à ce savant de son dévouement pour la mémoire d'un homme dont le nom durera autant que l'algèbre. BRASSINE.

FRACTIONS CONTINUES.

On dit qu'on trouve déjà l'emploi des fractions continues dans l'ouvrage suivant, antérieur à Brounker :

CATALDI (P.-A) : *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra dei numeri.* Bologna, 1613.

C'est à vérifier.

PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE DE DIOPHANTE

(voir BULLETIN, tome III, page 22);

PAR M. LEBESGUE.

La solution de Diophante est incomplète; cela vient de ce qu'il raisonne uniquement sur des nombres entiers,

(*) Ces vœux de mon savant collègue, émis il y a plus d'un siècle par d'Alembert, sont restés et resteront encore des siècles des *pia desideria*. Il ne faut pas que la science devienne trop facile. C'est l'opinion de bien des gens. TM.

tandis qu'il aurait fallu raisonner sur des nombres rationnels entiers ou fractionnaires.

S'il y a x mesures à 8 dragmes, y mesures à 5 dragmes, les équations du problème sont

$$8x + 5y = z^2, \quad x + y = \sqrt{z^2 + 60} = v,$$

x, y, z, v étant des nombres rationnels *positifs*.

Il faut donc avoir

$$z^2 + 60 = v^2,$$

de là

$$3x = v^2 - 60 - 5v,$$

$$3y = 8v - (v^2 - 60).$$

Ces équations montrent que l'on a

$$8 > v - \frac{60}{v} > 5.$$

L'équation

$$z^2 + 60 = v^2$$

donne, en posant

$$v + z = 2u,$$

d'où

$$v - z = \frac{60}{2u},$$

$$v = u + \frac{15}{u}, \quad z = u - \frac{15}{u};$$

il faut donc avoir u positif $> \sqrt{15}$.

y devient nul pour

$$v = 2(2 + \sqrt{19})$$

et x le devient pour

$$v = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{265}),$$

de sorte que u doit tomber entre

$$\frac{1}{4}\left[5+\sqrt{265}+\sqrt{10\left(5+\sqrt{265}\right)}\right]$$

et

$$2+\sqrt{19}+2\sqrt{2+\sqrt{19}},$$

ou encore entre

8 + une fraction et 11 + une fraction.

Posant

$$u=9, 10, 11,$$

on a les trois solutions

$$x=\frac{4}{27},\quad y=\frac{284}{27},\quad z=\frac{22}{3},\quad v=\frac{32}{3},$$

$$x=\frac{59}{12},\quad y=\frac{79}{12},\quad z=\frac{17}{2},\quad v=\frac{23}{2},$$

$$x=\frac{1252}{121},\quad y=\frac{244}{121},\quad z=\frac{106}{11},\quad v=\frac{136}{11}$$

(solutions de Diophante).

Toute autre valeur rationnelle de u, entre des limites données, conduira à une solution : il y en a donc une infinité.

Cette solution ne suppose rien qui ne se trouve déjà dans Euclide. Diophante aurait pu donner une solution complète s'il avait vu que la résolution des équations du deuxième degré est dans Euclide. Il s'ensuit que les limites à calculer pour que les solutions soient en nombres positifs pouvaient être déterminées ainsi que je l'ai fait plus haut.

DALRYMPLE (ALEXANDER).

Le Dépôt des cartes, plans et journaux de la marine, à Paris, possède l'ouvrage suivant : *General introduction to the Charts and Memoirs published by Dalrymple. Humanum est errare, Virg. Originaly printed in 1772.* Second edition. London, by George Bigg; 1786. Grand in-4.

C'est une collection de huit Mémoires. La pagination recommence pour chaque Mémoire. Tous ces Mémoires, à l'exception du premier, roulent sur la description des côtes de la Chine, d'après des voyages entrepris par divers bâtiments. Ce sont des journaux marins de voyage. Les cartes n'y sont pas.

Le premier Mémoire est : *Essay on nautical surveying by Dalrymple, originaly published in* 1771. Second edition. London, 1786.

Essai sur le relèvement nautique, 20 pages et 1 pl. Cette seconde édition est publiée par l'auteur, qui dit avoir fait quelques légers changements. La méthode de relèvement par la théorie des segments capables est expliquée (p. 7) sans aucune citation. On donne une construction géométrique, d'après le R. M. Michell, ami de Dalrymple.

Les Mémoires sur les côtes de la Chine doivent être très-utiles dans les circonstances actuelles.

Sur le dos du livre, on lit : *Nautical Memoirs and Journal Dalrymple. Vol. IV.* C'est probablement le quatrième volume d'une collection de journaux de voyages maritimes.

Le nom de Dalrymple le marin ne se trouve pas dans la *Biographie* Michaud.

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de Géométrie conformes aux *Programmes* de l'enseignement scientifique dans les lycées; par *Ch. Briot,* professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, et *Ch. Vacquant,* professeur adjoint de mathématiques spéciales au Lycée Bonaparte. Application, 2e et 3e parties; Géométrie descriptive et Nivellement, à l'usage des classes de Seconde, de Rhétorique et de Mathématiques spéciales; de la page 107 à la page 349, pl. III à IX, 91 figures dans le texte. Paris, in-8; 1856.

Permettez-moi, mon cher Rédacteur, de signaler le progrès qui se manifeste d'une manière évidente dans l'enseignement élémentaire de la géométrie descriptive.

Que de fois vous m'avez entendu dire et que de fois j'ai écrit : Quand donc commencera-t-on le dessin des projections avec le cinquième livre de la géométrie, et par la *projection cotée,* si simple, si élémentaire, si naturelle? Eh bien, nous y arrivons. Jugez-en.

C'est en 1823 que le capitaine du génie Noizet publiait, dans le n° 6 du *Mémorial de l'officier du génie*, son *Mémoire sur la géométrie appliquée au dessin de la fortification*, où se trouve exposée avec toute la clarté désirable la méthode des *plans cotés* que cet officier enseignait avec distinction à l'Ecole d'Application de l'Artillerie et du Génie. Le titre technique de ce Mémoire, la dénomination de *plans cotés*, et surtout la publicité restreinte d'une impression officielle, telles sont les causes du peu d'atten-

tion qu'on a apportée, en dehors du corps du Génie, à cet important travail. Ce n'est même, chose surprenante, que dix ans après, en 1833, et sur les demandes réitérées de l'Ecole de Metz, que les plans cotés sont entrés dans le programme de géométrie descriptive de l'Ecole Polytechnique (*). Où les y trouve-t-on? Dans les applications, avec les ombres, la perspective et la stéréotomie, quand au contraire on aurait dû mettre cette méthode de projection au commencement du cours. Quelle part lui faisait-on? Celle d'une leçon et d'une épure. Et l'épure était tellement insignifiante par elle-même et à cause de sa place reculée, la dix-neuvième dans la série des exercices, que les élèves n'ont jamais eu la moindre considération pour une méthode qu'ils ne pouvaient pas apprécier, faute de la connaître. Les conséquences de cet état de choses, qui a duré vingt ans, se sont étendues plus loin qu'il n'apparaît au premier abord.

En 1837, après plusieurs années d'essais faits à l'Ecole d'artillerie de Metz et aux Cours industriels gratuits de cette ville, je lithographiais la *Représentation des corps solides à l'aide d'un seul plan de projection et de cotes de distance*; production très-imparfaite, improvisée dans des circonstances de service pressantes, dont vous vous souvenez sans doute. Aussi ai-je mis de côté tout amour-propre d'auteur et cédé au seul désir d'être utile, en consentant à laisser cette autographie se répandre. J'espérais faire naître chez quelqu'un de mes honorables collègues de l'enseignement l'idée de reprendre ma voie, et de faire mieux que moi. Soin inutile!

(*) *Programme pour l'année scolaire* 1832-1833, p. 18. « Notions sur la » manière de représenter les surfaces par le moyen d'un seul plan de pro- » jection, — 19e épure. Problèmes divers à résoudre au moyen de ce » *procédé*. » Ces problèmes n'allaient pas au delà de la ligne droite et du plan.

En 1849, M. le général Noizet, alors membre du Conseil de Perfectionnement de l'Ecole Polytechnique et d'une Commission chargée de revoir l'enseignement des arts graphiques, me demanda quelques notes où je retrouve les réflexions suivantes : « Il n'y a pas de mesure » qu'on n'ait tentée à l'Ecole Polytechnique pour donner » de l'intérêt au *dessin topographique*; les programmes » de l'enseignement et les procès-verbaux des conseils en » font foi. Encore aujourd'hui, malgré les améliorations » réelles que le colonel Leblanc y a introduites, ce genre » de dessin, si utile et si attrayant par lui-même, n'est » pour les élèves que l'occasion de quelques exercices » qu'ils abaissent sous la misérable désignation de *topo*, » mot d'argot qu'il est désirable de voir disparaître de » l'Ecole. On ne relèvera le dessin topographique du discrédit où il est, qu'en prenant pour base de son enseignement la *projection cotée*, à laquelle un nombre » suffisant de leçons serait consacré. Alors seulement les » élèves accorderont à ce travail la considération qu'il » mérite, et le résultat utile de leurs exercices sera décuplé. Mais surtout que l'on remplace l'insignifiante » épure 19 par quelques autres questions faciles à trouver! En tout cas, c'est au commencement du cours et » non dans les applications que les plans cotés devraient » être. Je vais plus loin : leur vraie place est dans le » Programme d'admission, etc.

» Mieux que personne, vous reconnaîtrez que le système des doubles projections rectangulaires est l'objet » trop exclusif des leçons de géométrie descriptive à l'École. Son importance est grande sans doute, puisqu'il » est la base du *dessin architectural* et du *dessin des machines*, et, en général, de la représentation de tout objet qui a des dimensions plus ou moins considérables » dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Mais

» les bâtiments et les machines ne sont pas les seuls tra-
» vaux d'art que les ingénieurs aient à projeter, repré-
» senter et exécuter. Il est d'autres objets, tels que les
» canaux, les routes, les chemins de fer, les fortifications,
» les formes du terrain, etc., qui, ayant un très-grand
» développement dans le sens horizontal, sous de très-
» faibles dimensions dans le sens vertical, ne peuvent
» plus être représentés par des combinaisons de *plans* et
» d'*élévations,* mais seulement à l'aide de *plans* sur les-
» quels le relief est indiqué par des *cotes* convenablement
» disposées.... »

Il ne fut pas donné à l'auteur de la méthode des plans cotés d'attacher, enfin, à son nom la célébrité qu'il aura un jour en dehors du corps du Génie.

Je ne parle que pour mémoire de ce que j'ai tenté dans les années 1850 et 1851, lorsque je remplaçais le colonel Leblanc appelé au siége de Rome. Je me suis servi des *explications* que j'étais autorisé à donner en commun aux élèves réunis à l'amphithéâtre pour faire apparaître la projection cotée en topographie.

Nous voici en 1852. Tout étant mis en question par la *Commission mixte chargée de la révision des Programmes d'admission aux Écoles du gouvernement et de l'enseignement scientifique des Lycées,* j'en profitai pour adresser des *Notes* à M. le Président de cette Commission, ainsi qu'à M. le général Noizet et à M. Bommart, alors directeur des études à l'Ecole Polytechnique, l'un et l'autre membres de la Commission. « Je suis na-
» turellement conduit, disais-je à M. le Président, à
» vous parler du *dessin des projections* qui manque dans
» l'enseignement primaire des sciences, bien que l'expé-
» rience ait prouvé surabondamment que les ouvriers,
» hommes intelligents mais peu exercés aux spéculations
» de l'esprit, y réussissent parfaitement. Pourquoi donc

» les lycées sont-ils en retard sur ce point? Cela tient à
» ce que l'on croit les élements de la géométrie descriptive
» plus difficiles qu'ils ne le sont réellement, et que l'on
» regarde à tort comme inhérentes à la matière de l'en-
» seignement des difficultés qui ne viennent que de la mé-
» thode que l'on suit. Je voudrais pouvoir dire à mes
» collègues des lycées :

» Placez les premiers éléments du dessin à la règle et
» au compas dans la géométrie des deux dimensions, et
» non dans le dessin des projections.

» Parlez de *projections* dès le cinquième livre de la
» Géométrie, en aidant les élèves par quelques exercices
» sur l'usage du fil à plomb et du niveau d'eau.

» Renoncez à mettre au début les élèves en présence
» de deux plans de projection, c'est-à-dire d'une dualité
» dont la conception entraîne des idées de rabattement et
» de relèvement d'une difficulté réelle, que tous vous avez
» constatée; difficulté encore augmentée par la considé-
» ration des changements de plans dont on a voulu faire
» une méthode au lieu d'un simple artifice graphique,
» connu et pratiqué depuis longtemps, même avant la
» *Géométrie descriptive* de Monge. Commencez plutôt
» par la méthode d'un seul plan de projection et de cotes
» de distance, par la *projection cotée*, avec laquelle les
» élèves parviennent très-promptement à *écrire* leurs
» combinaisons sur la grandeur figurée, à *composer*, en
» un mot, presque avec la rapidité de la pensée....

» Renoncez à faire reproduire aux élèves les épures
» gravées des auteurs et obligez-les de bonne heure à
» travailler sur des programmes individuels, travail qui
» seul peut leur donner de l'initiative, les rendre sûrs
» d'eux-mêmes et les amener finalement à lire facilement
» dans l'espace.

» Cessez de les arrêter à des questions purement abs-

» traites, telles que la distance d'un point à une droite
» ou à un plan, de la distance de deux droites, de l'angle
» de deux plans, etc., questions fondamentales qu'on
» peut comparer avec raison aux quatre règles de l'Arith-
» métique, et qu'il suffit de traiter au tableau avec de la
» craie ou sur le papier avec le crayon. Qu'on leur de-
» mande plutôt d'imaginer une forme, un solide défini,
» une pyramide, je suppose, de la représenter et d'exé-
» cuter sur elle diverses opérations empruntées aux com-
» binaisons de la ligne droite et du plan : par exemple,
» de la tronquer suivant certaines conditions, d'en me-
» surer les dimensions et d'en calculer le volume, d'en
» développer la surface et de construire l'angle qui me-
» sure l'inclinaison de deux faces adjacentes, etc. A ce
» propos, on leur expliquerait sommairement la possi-
» bilité d'exécuter, avec les résultats ainsi obtenus, le
» solide qu'ils ont imaginé et représenté, de l'exécuter en
» papier d'abord, puis en matière solide (plâtre, cire,
» terre glaise, etc.).

» Signalez enfin aux élèves le triple objet de la géo-
» métrie descriptive, qui est de concevoir une forme
» géométrique, de la représenter d'après les procédés du
» dessin des projections et d'en déduire les éléments né-
» cessaires pour son exécution en relief; réciproque-
» ment, de mesurer un solide donné, de le *lever*, selon
» l'expression consacrée par la pratique, pour pouvoir
» le rendre intelligible par tous et exécutable en relief
» à une échelle quelconque.

» Suivez cette voie déjà éclairée par l'expérience, et
» vous serez surpris de la promptitude avec laquelle les
» élèves acquerront des notions exactes de situation,
» de forme, de dimensions, de symétrie, de régula-
» rité, etc.; vous les verrez passer avec une étonnante
» facilité de la projection cotée aux doubles projections

» rectangulaires, à la projection oblique et parallèle,
» à la projection concourante, etc.; vous les trouverez
» enfin parfaitement préparés pour les applications les
» plus importantes de la géométrie descriptive, qui sont
» les *levers de terrains, de bâtiments et de machines,*
» but final de l'enseignement primaire de la géométrie
» descriptive. »

En définitive, qu'est-il sorti des travaux de la Commission mixte de 1852? Vous le trouverez, mon cher Rédacteur, dans le *Plan d'études des Lycées* de 1853, sous la forme d'un Programme découpé, discontinu, sans méthode apparente, ainsi que le montrent, pour ne citer qu'un exemple, les fragments de projection cotée qui sont placés sans ordre à la suite du nivellement. Mais la conséquence la plus fâcheuse de ce plan d'études, quant à ce qui regarde l'enseignement de la géométrie descriptive et des travaux graphiques, c'est la suppression de la géométrie descriptive sur le programme des mathématiques élémentaires. Cette suppression est l'objet d'un regret général.

Toutefois on peut, on doit même, en s'arrêtant au fait de l'apparition des plans cotés, considérer les nouveaux Programmes comme un acheminement vers la meilleure méthode d'enseignement du dessin des projections. La tentative récente de MM. Briot et Vacquant en fournit une preuve. Ces deux habiles professeurs ont fait, *conformément aux Programmes de l'enseignement scientifique dans les lycées,* tout ce qu'il était possible de faire. Reproduire leur table des matières, serait donner lieu à de nombreuses observations de détail qui ne sauraient trouver place ici. En résumé, voici où en est à Paris, à la fin de l'année 1856, l'enseignement élémentaire de la géométrie descriptive.

L'*Université* a donné entrée aux *plans cotés* dans ses

programmes, programmes dont le livre de MM. Briot et Vacquant est l'expression fidèle.

A l'*École Polytechnique*, la projection cotée, réunie aux diverses méthodes de représentation de l'étendue figurée, est reportée dans les premières lecons de géométrie descriptive.

On la trouve placée dans les mêmes conditions sur le programme du cours de géométrie descriptive du *Conservatoire des Arts et Métiers*; bien plus, on la retrouve sur celui du cours de géométrie appliquée du même établissement, sans doute pour y être traitée d'un autre point de vue.

A *l'Ecole municipale de Dessin de la ville de Paris*, le professeur de géométrie descriptive traite aussi les plans cotés, mais, ainsi que MM. Briot et Vacquant, après une exposition complète de la méthode des projections rectangulaires et des applications qui s'y rattachent.

C'est-à-dire que partout, aujourd'hui, on enseigne la projection cotée, mais pas encore à sa vraie place et avec le développement qui lui convient. Voilà où nous en sommes sur ce point, après un tiers de siècle. Patience! mon cher Rédacteur, le dernier pas sera fait bientôt. En attendant, rendez-moi la justice de reconnaître que j'ai prêché d'exemple, en paroles et en action.

L'année dernière, après Pâques, j'ai remplacé M. Ch. Dupin au Conservatoire des Arts et Métiers. Huit leçons seulement étaient disponibles; il fallut donc choisir un sujet; on choisit l'art de lever un terrain, qui pût, tout en se rattachant au titre du cours de géométrie appliquée, être resserré dans ce cadre étroit. Mais plus tard, par suite de la prolongation imprévue d'un mois de l'ensemble des cours du Conservatoire, cette matière dut être étendue pour quatorze leçons. Cet incident rompit toute l'économie de mon court enseignement, et m'empêcha, dans l'im-

possibilité où j'étais de revenir sur mes pas, de consacrer à la projection cotée quelques leçons qui auraient été parfaitement placées là. Si ma santé m'avait permis de rester à ce poste utile, je me serais appliqué à combler cette lacune.

J'ajouterai, en terminant, qu'ayant été appelé à l'Ecole Normale supérieure pendant les années 1853 et 1854 pour diriger les exercices de levers de terrain et de nivellement, j'ai eu l'occasion de voir l'état des travaux graphiques à cette école, et de concevoir la pensée d'être chargé de cette direction, bien autrement importante à mes yeux. J'ai même fait quelques démarches à ce sujet, bien convaincu que c'était là qu'il importait, avant tout, de faire connaître et pratiquer la projection cotée.

Note du Rédacteur.

Ire Partie (classe de Troisième). Contient le levé des plans; mètre, graphomètre, équerre, planchette, arpentage, boussole, triangulation.

IIe Partie (classe de Seconde). Méthode des projections orthogonales; polyèdres, cylindres; plan, élévation et coupe de bâtiments.

IIIe Partie (Rhétorique). Nivellement, courbes de niveau; *plan coté;* problème sur les cotes; lignes de faîte; thalwegs, etc.

Appendice (Mathématiques spéciales). Niveau à bulle d'air, vérification des instruments; niveau d'Egault.

Voilà ce que l'on enseigne dans les lycées. Que reste-t-il à apprendre dans les écoles dites d'*application?* L'ouvrage commence par 1re et 2e *Leçons*. Nous maintenons qu'il faut dire 1re et 2e *Leçon* au singulier. Dirait-on 1er et 2e *chevaux?* La méthode des plans cotés est à la page 185; elle devrait se trouver à la page 1. C'est l'opinion du savant géomètre graphiste, chef des travaux graphiques à l'Ecole Polytechnique; opinion à laquelle nous

adhérons complétement. Si un plan suffit, pourquoi de prime abord en prendre deux? Il y a déjà un tiers de siècle que M. Noizet a montré avec une clarté extrême qu'un seul plan suffit à la solution de toute espèce de problèmes dans l'espace. D'ailleurs, dans les services publics, on emploie beaucoup plus de plans cotés que d'autres, et c'est pour les services publics que la géométrie descriptive a été créée; c'est là qu'elle obtient ses principales applications. M. Bardin est surpris de la lenteur qu'on met à l'adoption de la méthode Noizet. Le contraire serait plus surprenant. Le calcul infinitésimal, proposé par d'Alembert il y a plus d'un siècle, est-il adopté? Principe général: Le temps exigé pour l'admission d'une idée dans le courant de l'enseignement est toujours en raison inverse de la quantité de bon sens que renferme cette idée. C'est même un fait d'expérience: plus une proposition s'éloigne du sens commun, pourvu qu'elle soit entourée d'un clinquant profondément inintelligible, plus elle a de chances de succès, d'être acclamée avec enthousiasme par la foule. C'est ce que nous apprend un des plus abstraits penseurs de l'antiquité païenne et des plus grands poëtes de l'antiquité romaine:

Omnia enim stolidi magis admirantur amantque
Inversis quæ sub verbis latitantia cernunt
Veraque constituunt quæ belle tangere possunt
Aures et lepido quæ sunt fucata sonore.
(*De Rerum natura*, lib. I, v. 642.)

Un poëte français ajoute que ces *stolidi* sont partout en majorité (*).

(*) Pourquoi Lucrèce est-il exclu de l'enseignement? Ce poëte fait pourtant partie de l'édition des *Variorum* publiée par l'ordre de Louis XIV à l'usage du Dauphin. Le système atomistique est même aujourd'hui la base de toutes les sciences. Gassendi, prêtre philosophe, enseignait ce système au Collége de France et avait entrepris une traduction de Lucrèce.

NOTE
Sur la correspondance scientifique de Jean Bernoulli ;
PAR M. PROUHET.

Longtemps après l'apparition des journaux scientifiques, vers le milieu du XVIIe siècle, les savants ont continué à se communiquer par lettres leurs découvertes. Pour donner une idée de l'activité qui régnait dans ce commerce épistolaire, je citerai l'annonce suivante que je trouve sur la couverture du Ve cahier (1796) du journal d'Hindenburg (*Archiv der reinen und angewandten mathematik*).

« *Annonce relative à diverses correspondances de Jean Bernoulli avec*

		Lettres.
1.	Bilfinger (1720-25), en latin...........	60
2.	Burnet (fils de l'évêque) (1708-14), en fr.	32
3.	Cramer (1727-33), en français..........	26
4.	De Crouzaz (1712-24), en français.......	42
5.	L. Euler (1729-42), en latin............	24
6.	De Fontenelle (1720-30), en français....	19
7.	Hermann (1702-27), en latin...........	80
8.	Marquis de l'Hôpital (1694-1701) en fr...	85
9.	De Mairan (1723-40) en fr.. ... Environ	112
10.	Michelotti (1714-25), partie en latin et partie en français.................	108
11.	Moivre (1704-14), en français..........	19
12.	De Montmort (1704-19), en français. ...	41
13.	De Maupertuis (1730-46) en fr.. Environ	100
14.	Renau (1713-14), en français (en partie déjà imprimées)...................	8
		756

	Report.....	756
15.	Jean et J.-Jacques Scheuchzer (1706-36), en latin et en français............... (Celles-ci sont moins scientifiques que les autres.)	480
16.	Varignon (*) (1692-1722), en français...	246
17.	Wolf (1706-43), en latin....	97
18.	En outre plus de 120 lettres adressées en grande partie à des savants ou émanées d'eux.........................	120
		1699

» En même temps sa correspondance avec Bousquet au sujet de l'édition des œuvres complètes de Jean Bernoulli; enfin divers écrits académiques (*feyerlischen reden*) non encore imprimés et qui contiennent des sujets dignes d'être lus. La plupart de ces lettres sont accompagnées des réponses de Bernoulli, dont la majeure partie a une certaine étendue et va au fond des choses (*lang und grundlich*).

» Si l'on trouvait un éditeur disposé à publier cette précieuse et intéressante collection d'un des plus grands hommes en son genre, on la céderait à des conditions raisonnables. Le titre pourrait être : *Lettres relatives à l'histoire des sciences mathématiques.* »

Il paraît qu'aucun éditeur n'a voulu entreprendre la publication de cette collection dont le possesseur ne se nomme pas et dont il n'est pas question dans le corps du journal. Cette annonce doit être fort peu connue, puisqu'elle se trouve sur une couverture qu'on enlève ordinairement quand on fait relier l'ouvrage, à moins qu'on ne soit un bibliophile zélé et désireux de ne rien perdre.

(*) Varignon légua tous ses papiers à Fontenelle, qui annonce dans l'éloge de son ami (*Histoire de l'Académie*, 1722, p. 146) la publication prochaine de sa *Mécanique* et de sa *Correspondance*; mais la *Mécanique* seule a paru.

Parmi toutes ces lettres, il n'y en a qu'une douzaine, écrites par Bernoulli à Euler, qui aient été publiées. On les trouve dans la *Correspondance physique et mathématique de quelques géomètres célèbres du* XVIIIe *siècle*, recueillie par P.-H. Fuss. Saint-Pétersbourg, 1843. Les lettres d'Euler à Bernoulli manquent dans cet ouvrage et devaient se trouver dans la collection citée plus haut.

La correspondance de Bernoulli et de Leibnitz, qui n'est pas comprise dans la liste ci-dessus, se compose de 275 lettres et a déjà été publiée deux fois :

1°. Sous ce titre : *Virorum celeberrimorum Got.-Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum*. Lausannæ et Genevæ, 1745. 2 vol. in-4°.

2°. Dans les *Leibnizens mathematische Schriften*, herausgegeben von Gerhardt. Band III, pages 111-974. Halle, 1855-1856; in-8.

Cette dernière publication est la plus complète, car elle renferme environ 50 lettres inédites et de nombreux passages que les premiers éditeurs avaient supprimés par un sentiment de convenance et probablement sur la recommandation expresse de Bernoulli. Les passages rétablis dans la nouvelle édition n'intéressent guère la science elle-même, mais ils font connaître de plus en plus l'esprit caustique et le caractère ombrageux de Jean Bernoulli. Les citations suivantes en donneront une idée (*).

Bernoulli loue ce bon Varignon, qui généralisait si bien ses théorèmes et ceux de Leibnitz, mais ce n'est pas sans lancer quelque sanglante épigramme contre le peuple français.

« Laudo hujus viri raram modestiam; [non certe Gallum diceres, adeo alienus est a nationis ingenita fero-

(*) Bernoulli avait conscience de son immense supériorité et avait le tort de s'en exprimer trop ouvertement et d'une manière blessante. Tr.

citate et fastu : odit ipse vanitatem suorum popularium, qui superciliose super extraneos se attollunt, nostra contra invidos strenue defendit (*)]. » (Page 481.)

Les Italiens sont moins fiers, à ce qu'il paraît, mais ils s'abusent sur l'originalité de leurs inventions.

« Remitto, ut jubes, epistolam D[ni] Zendrini. Ex ea video, ut et Riccatum [aliosque quosdam Italos velle agere simias nostras, non tamen agnoscere nisi] nostra tantum imitari. » (Page 946.)

Quant aux Anglais, Bernoulli les déteste cordialement et ne laisse échapper aucune occasion de leur dire quelque bonne vérité.

« [Hi non disputant ut veritatem tueantur, sed quia de nationis gloria agi putant, quando vident magistrum suum, in cujus verbi jurarunt, in discrimine causæ sive bonæ, sive malæ (hoc non attendunt) versari]. » (Page 966.)

Bernoulli ne dédaigne pas le jeu de mots, quand il s'agit de dire une méchanceté.

« Vidi Muysi Elementa Physices et perlustravi : [tumidus est titulus et multa promittens, sed de quo vere dici potest : Parturiunt montes, nascetur ridiculus mus. Cujus itaque nomen et omen habet auctor]. » (Page 892.)

De plus tristes pages sont celles où la haine de Jean Bernoulli se répand en amères récriminations contre son frère. La passion l'entraîne alors dans des exagérations incroyables. Ainsi il assure hardiment (*audacter*) que sans lui son frère Jacques n'aurait peut-être pas dépassé les éléments.

« [Nam licet explicatorem sex priorum Elementorum Euclideorum jam ante decennium habuerim fratrem *vel potius instigatorem*, audacter asseverare possum illum forsan absque meo adminiculo communis geometriæ po-

(*) Les passages renfermés entre crochets [ ] sont remplacés par des points dans l'ancienne édition.

mæria nunquam prætergressum fuisse.] » (Page 163.)

Néanmoins Bernoulli n'oublie pas les égards que l'on doit à un frère aîné.

« [Hæc tibi dico saltem ut videas illum nullam me persequendi rationem habere. Quod quidem publice ostendere deberam, sed *fraternitatis leges melius observo et primogenituræ aliquid defero.*] » (Page 163.)

Il est à regretter que M. Gerhardt n'ait pas distingué par un signe typographique les additions faites à l'ancien texte, ce qui aurait permis d'apprécier d'un coup d'œil le nombre et la valeur des documents nouveaux dont sa publication enrichit l'histoire scientifique. Il aurait dû, ce me semble, conserver les sommaires et la table des matières de l'ancienne édition, appendices sans lesquels toute recherche est impossible. Malgré ces critiques, qui ne portent que sur la forme, nous recommandons à tous les amis des sciences l'utile entreprise de MM. Gerhardt et H. Pertz. Peut-être faut-il attribuer au peu d'encouragement qu'ont reçu les éditeurs la lenteur avec laquelle marche la publication des OEuvres complètes de Leibnitz, qui, commencée en 1842, n'est pas encore terminée en 1857. L'honneur de notre époque, et particulièrement de deux nations, est intéressé à ce qu'un pareil monument ne reste pas inachevé.

Note du Rédacteur. Il est à remarquer que les hommes les plus occupés, qui ont publié les ouvrages les plus nombreux, les plus volumineux, sont aussi ceux qui se sont montrés les correspondants les plus actifs, répondant toujours aux lettres qu'on leur écrivait sur des points scientifiques ou littéraires. Il suffit de citer Leibnitz et Voltaire. Le *manque de temps* est un prétexte banal, le plus souvent mensonger, servant de manteau soit à la paresse, soit à un orgueil ridicule, apanage ordinaire de la médiocrité.

BIBLIOGRAPHIE.

Tafeln der quadrat und kubik-zahlen aller naturlichen zahlen bis hundert tausend, nebst ihrer anwendung auf die zerlegung grosser Zahlen in ihre faktoren nach einer neuen methode berechnet; von Dr *Jacob Philipp Kulik.* — Tables des carrés et des cubes de tous les nombres naturels jusqu'à 100 000, avec l'application à la décomposition des grands nombres en facteurs, calculées par une nouvelle méthode; par *Jacques-Philippe Kulik*, professeur ordinaire de mathématiques à l'université de Prague. Leipzig, 1848; in-8 de VII-460 pages. Prix : 3 florins.

Chaque page contient 250 nombres avec leurs carrés et leurs cubes, distribués en cinq progressions arithmétiques de 50 nombres consécutifs chacune. Nous donnons pour exemple l'en-tête et les trois premières lignes de la page 56.

N	13		113		213		313		413	
	N^2	N^3	N^2	N^3	N^2	N^3	T^2	N^3	N^2	N^3
	1	2	12	14						
50	82 2500	46037 5000	882	6213537						
51	82 5201	6584 6551	84	252187						
52	82 7904	7132 6203	86	290844						
..										
..										
..										
99										

1re progression.	1350,	1351, 1352, ...,	1399,
2e »	11350,	11351, ...,	11399,
3e »	21350,	21351, ...,	21399,
4e »	31350,	31351, ...,	31399,
5e »	41350,	41351, ...,	41399.

N désigne la colonne des nombres, N^2 la colonne des carrés et N^3 celle des cubes; le carré de 1350 est 1822500 et le chiffre 1 est le premier chiffre à droite de tous les nombres de cette colonne; ainsi

$$(1351)^2 = 1825201, \quad (1352)^2 = 1827904.$$

Il en est de même pour les chiffres 2, 12, 14. Les chiffres séparés 2500 terminent tous les carrés de cette ligne; de même pour les cubes.

Ainsi

$$(11350)^2 = 128822500,$$
$$(11351)^2 = 128845201,$$
$$(11352)^2 = 128867904,$$
$$(1350)^3 = 2460375000,$$
$$(11350)^3 = 1462135375000,$$
$$(11351)^3 = 1462521876551.$$

L'auteur nomme *tête* les chiffres que les nombres dans la même progression ont en commun à gauche : ainsi les nombres 1, 2, 12, 14 sont des *têtes;* et il nomme *pied* les chiffres à droite qui ont en commun les nombres de la progression dont la raison est 10000 : ainsi 2500, 5201, 7904, 5000, 6551, etc., sont des *pieds*. Les chiffres du milieu sont le *corps :* ainsi 82, 46037, 882, etc., sont des *corps*. Il arrive quelquefois que dans une progression par unités, la tête doit être augmentée de 1 ; un astérisque * indique cette augmentation. Très-rarement cette augmen-

tation monte à 2, et c'est un trait | qui indique cette augmentation. La page suivante, 57, contient les progressions commençant par 513, 613, 713, 813, 913, et doit être regardée comme ne formant qu'une seule page avec la précédente. On voit comment, par ce procédé ingénieux, on a pu inscrire cent mille nombres avec leurs carrés et leurs cubes sur 400 pages in-8 renfermant un million et demi de chiffres.

M. Caillet a eu la même idée en 1848 (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 425).

Il est évident qu'on peut, au moyen de cette Table, trouver les carrés et les cubes des nombres renfermés dans la formule $a.10^n + b$, pourvu que a et b aient moins de six chiffres; mais il faut faire le produit $2ab$ et $3ab(a+b)$; d'ailleurs

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right).$$

On voit aussi qu'elle peut servir à extraire les racines carrées et cubiques.

L'ouvrage contient en outre onze Tables auxiliaires; la onzième donne les multiples de π et de $\frac{1}{\pi}$ depuis 1 à 100; avec 30 décimales pour π et avec 12 pour $\frac{1}{\pi}$.

Les dix autres Tables servent à décomposer un grand nombre en deux facteurs, lorsque cela est possible.

La Table II contient la décomposition en deux carrés de tous les nombres premiers de forme $4n+1$ depuis 5 jusqu'à 10529.

On trouve une semblable Table dans le *Journal* de Crelle (t. XXX, p. 174) étendue jusqu'à 11981; mais les nombres 197, 901, 2713, 4913, 6997 y manquent.

Au moyen de cette Table, tout nombre qui est le pro-

duit de nombres premiers de forme $4n+1$ peut être décomposé en somme et en différence de deux carrés par les théorèmes connus, pourvu que ces facteurs soient contenus dans cette Table.

La Table III donne les nombres impairs de 7 à 12097 qui sont la différence de deux cubes : $N = x^3 - y^3$.

La Table IV donne les nombres compris entre 9 et 18907 qui sont la somme de deux cubes. $N = x^3 + y^3$, avec les valeurs de x et de y.

Tous les carrés possibles n'ont que 1044 terminaisons, en prenant pour terminaison les quatre premiers chiffres à droite.

La Table X donne toutes ces terminaisons avec le plus petit carré correspondant. *Exemple :*

Terminaisons.	Carrés.
0001	11249 0001
0004	22498 0004
0009	31253 0009

Une terminaison quadratique est dite congruente *additive* à un nombre N, lorsqu'en ajoutant cette terminaison aux quatre premiers chiffres à droite de N, on a encore une terminaison quadratique; la congruence est soustractive lorsqu'il faut retrancher.

Exemple. Soit

$$N = 8514341;$$

les terminaisons 0100, 0900, 2100, 2500, etc., sont congruentes additives; car $4341 + 0100 = 4441$ qui est encore une terminaison quadratique.

Le Tables V, VI, VII, VIII, IX sont destinées à trouver ces terminaisons congruentes à une terminaison d'un nombre donné N.

On comprend l'utilité immense de ces Tables pour

trouver les solutions de l'équation

$$N = x^2 \pm y^2,$$

et par conséquent les facteurs de N; soit

$$N = 2237791.$$

Les terminaisons additives congruentes à 7791 sont

$$0\overset{*}{2}2\overset{*}{5},\ 0\overset{*}{6}2\overset{*}{5},\ 1025,\ 2225,\ \overset{*}{3}02\overset{*}{5},\ \overset{*}{4}\overset{*}{2}25,$$
$$5025,\ 6225,\ 7025,\ 8225,\ 902\overset{*}{5};$$
$$0609,\ 8809,\ \overset{*}{2}\overset{*}{2}09,\ 2609,\ 3809,\ 4609,$$
$$9809,\ 6609,\ 7809,\ 8609,\ 9809.$$

Les nombres astérisqués sont des carrés; si on les ajoute successivement à N, on trouve des nombres N qui commencent tous à gauche par 223 et qui ont des terminaisons quadratiques; le nombre 0225 ajouté à N donne un carré

$$2237791 + 0225 = 2238016 = (1496)^2,$$

donc

$$N = (1496)^2 - 15^2 = 1511 . 1481.$$

Euler, ayant rencontré ce nombre N, déclare qu'il serait pénible de rechercher s'il est premier ou non (*N. Comm. A. S. Petrop*, t. IX, p. 17).

Soit

$$N = 997331.$$

Par un procédé analogue, l'auteur trouve

$$N = 127 . 7853.$$

Gauss parvient à la même décomposition par la théorie des résidus quadratiques (*Disq. arith.*, p. 581).

Dans une note, Gauss dit avoir calculé une Table pour faciliter ces décompositions et exprime l'intention de publier cette Table si on le désire. A-t-elle été publiée?

Les Tables VIII, IX sont relatives aux terminaisons congruentes soustractives, et servent à découvrir si les

nombres de la forme $4n+1$ sont des sommes de la forme x^2+y^2 ; lorsqu'on n'a qu'une solution ; le nombre est premier ; lorsqu'on en a deux, il n'est pas premier, et on le décompose de cette manière.

Soit

$$N = A^2 + B^2 = C^2 + D^2 = ab,$$

on a

$$A = pr - qs, \quad C = pr + qs,$$
$$B = ps + qr, \quad D = ps - qr,$$
$$a = p^2 + q^2, \quad b = r^2 + s^2,$$

$$A + C = 2pr, \quad B - D = 2qr;$$

le facteur commun à A + C et B + D fait connaître p et de là r et s.

$$C - A = 2qs, \quad B - D = 2qr;$$

le facteur commun $2q$ donne la valeur de q.

Exemple :

$$N = 10091401,$$

on trouve l'unique solution

$$x = 1251, \quad y = 2920.$$

Ainsi N est un nombre premier. C'est le plus grand nombre premier connu (*). Pour le démontrer, Legendre remplit trois pages in-4 de calculs assez pénibles (*Théorie des nombres,* 3e édit.) ; M. Kulik n'a besoin que d'une demi-page in-8.

Nous croyons avoir fait ressortir les services rendus par le savant professeur de Prague.

(*) M. Lebesgue me fait observer que depuis la publication des Memoires d'Euler de 1778, on connait des nombres premiers plus grands, entre autres 11866009, 15518809 (*Commentationes arithmeticæ collectæ,* Petersb., 1849).

SUR LE COMPAS DE PROPORTION.

L'invention de cet instrument, qui entrait jadis dans tous les étuis de mathématiques, est consignée dans l'ouvrage suivant :

Le operazioni del compasso geometrico e militare di Galileo, stampata in Padova, por Pietro Marinelli. 1606. In-fol.

Tiré à 60 exemplaires, cet ouvrage est d'une extrême rareté. Il est réimprimé dans les *Œuvres* de Galilée, publiées à Bologne en 1655, en tête du premier volume. On donne à Galilée le titre de noble florentin, professeur de mathématiques au collége de Padoue. La dédicace à Cosme de Médicis, prince de Toscane, porte la date de juillet 1606.

Bientôt après, un noble milanais nommé Capra publia un opuscule latin où il s'attribue l'invention du *compas*. Voici le titre.

Usus et fabrica circini cujusdam proportionis per quam omnia fere tum Euclidis tum mathematicorum omnium problemata facili negotio resolventur, opere et studio Balthazaris Capræ, nobilis Mediolanensis explicata. Patav., 1607; in-4 de 60 $\frac{1}{2}$ pages (*).

Galilée déféra cet ouvrage au tribunal des *réformateurs* du collége de Padoue, siégeant à Venise. Il obtint gain de cause. La sentence porte que Capra est convaincu de plagiat et d'ignorance et que son ouvrage doit être confisqué. On en avait tiré 483 exemplaires : 440 furent

(*) Dans l'ouvrage de Capra un professeur napolitain adresse des éloges à Capra; c'est probablement ce qui a fait dire erronément à Montucla que Capra est Napolitain.

saisis chez l'imprimeur, 13 chez l'auteur, mais 30 étaient déjà distribués en divers pays d'Europe; de là aussi l'extrême rareté de cet opuscule. Pour remédier à ce commencement de publicité, Galilée crut nécessaire de faire paraître une défense :

Difesa contra le calumnie e imposture di Baldassare Capra Milanese. Usetegli si nella considerazioni astronomica sopra la nuova stella del MDCVIIII *come* (*e assai più*) *nel publicar nuovamente come sua invenzioni la fabrica et gli usi del compasso geometrico e militare sotto in titolo di Usus et fabrica* (comme ci-dessus). Padova, 1607.

Galilée réfute d'abord un autre écrit de Capra où il prétendait que Galilée devait la découverte de la célèbre étoile de 1607 à un nommé Coznaro. Après avoir montré la fausseté de cette allégation, il dit avoir fait construire, il y a cinq ou six ans, une centaine de ses compas à Padoue; qu'il en avait montré l'usage au père de Capra et à Capra lui-même. Il rappelle un grand nombre de passages de l'écrit de Capra qui ne sont qu'une traduction littérale de *Le operazioni del compasso, etc*. Il montre que ce Capra est un ignorant, qui, ayant peu d'affection pour lui, s'est rendu l'instrument d'un de ses plus acharnés adversaires, qu'il ne nomme pas et sur lequel il s'exprime avec beaucoup d'animosité. Il le déclare l'*ennemi du genre humain*.

On a composé beaucoup d'ouvrages sur le compas de Galilée; Kastner en donne la liste dans son *Histoire des Mathématiques*, t. III, p. 336. Cet instrument, tombé en désuétude, était autrefois aussi répandu, aussi préconisé que de nos jours la règle de Gunther.

Burgi, le célèbre co-inventeur des logarithmes, a construit avant Galilée un compas, mais qui n'a rien de commun avec celui de l'illustre Pisan.

NOTE SUR LE PROCÉDÉ POTHENOT.

(voir Nouvelles Annales, t. XIII, p. 367.)

Ce procédé, attribué communément à Pothenot, appartient à Snellius; il est explicitement décrit dans l'ouvrage : *Eratosthenes Batavus de terræ ambitus vera quantitate à Willebrordo Snellio,*

Διὰ τῶν ἐξ ἀποστημάτων μετρουσῶν διοπτρῶν (*),

suscitatus. Lugduni Batavorum apud Jodocum à Colster, ann. CIↃIↃCXVII.

Deux branches de laurier forment ceinture autour de cette devise : *O quam contempta res est homo, nisi supra humana se erexerit* (**).

Cet ouvrage remarquable, in-4° de 263 pages, est divisé en deux livres. Le premier contient une exposition critique (il place la terre *fixe* au *centre* du monde, mais il n'en veut pas à ceux qui sont d'une autre opinion) des mesures de la terre données par les Grecs et les Arabes. Le second livre débute par des recherches soignées sur le rapport du pied du Rhin, qu'il adopte pour unité, à divers autres pieds en usage : il trouve que ce pied étant représenté par 1000, celui de Paris est 1055. Il évalue aussi le poids d'un pied cube rhinlandique d'eau *distillée,* afin de rattacher la longueur de ce pied à une donnée naturelle fixe : à cet effet, il invente un appareil ingénieux, qu'il emploie avec beaucoup de précautions,

(*) Calculé par l'intervalle angulaire compris entre des lunettes.

(**) Ah! combien l'homme est chose méprisable, s'il ne s'élève au-dessus de l'humaine nature.

dans l'esprit de celles qu'on a prises pour déterminer le gramme.

Il détermine la distance des deux villes Alkmaer et Berg-op-Zoom, en les reliant par vingt stations et une méthode de triangulation qu'on a depuis toujours suivie pour la même opération, et qui est encore usitée; et ayant déterminé la différence des latitudes de ces deux villes, il fait la même opération pour Leyde et Alkmaer, et, prenant une moyenne, il trouve 28500 perches, chacune de 42 pieds du Rhin pour longueur de 1 degré du grand cercle de la terre. Ainsi, 342060 pieds du Rhin, environ 54028 toises ou 27 lieues de 2000 toises, longueur trop grande de 2 lieues environ. Il a été aidé dans ces travaux par les deux frères Érasme et Caspar de Sterrenberg, jeunes barons autrichiens, déjà versés dans les calculs trigonométriques. Philémon, leur professeur, voulant mettre à profit les vacances, avait prié Snellius de faire connaître la contrée à ses élèves. Alors Snellius les engagea à prendre part à sa triangulation. Il prit pour première station un endroit nommé *Oudewart*, lieu de sépulture de son père, et où sa vieille mère vivait retirée depuis son veuvage. Il célèbre cette ville *ob nobilem illam cladem quam Oudewarte est perpessa quod omnium prima patriæ libertatem suo sanguine redemerit*, à cause de la noble catastrophe qu'Oudewart avait subie : la première de toutes les villes, elle racheta de son sang la liberté de la patrie. Il donne à ce sujet l'extrait suivant d'un manuscrit de son père :

Veteraquinum arctè obsessum fuit, tandem captum VII Augusti Juliani, anno CIϽ IϽ LXXV. Sole medium cœlum jam signante, cives et præsidarii cæsi, nulli neque ætati nec sexui parcitum, paucissimi in semen servati. Oppidum incensum et flamma absumptum. Sed nescio quo me patriæ amor et meorum dulcissima recor-

datio abripuerit, quin ad institutum potius revertar?

« Oudewart fut étroitement assiégée, et enfin prise le 7 août 1575, à midi. Soldats et bourgeois furent massacrés; on n'épargna ni l'âge ni le sexe. Quelques enfants seuls au berceau furent conservés. La ville incendiée devint la proie des flammes. Mais où m'entraîne l'amour de la patrie, les si douces ressouvenances des miens? Retournons plutôt à notre besogne. »

Le chapitre X (page 199) est intitulé : *Trium locorum intervallis inter se datis, quarti distantia ab omnibus unica statione definitus.*

« Les distances mutuelles des trois points étant données, déterminer par une seule station la position d'un quatrième point. »

Il prescrit à cet effet la méthode des *segments capables*, que Pothenot croyait avoir inventée, et qui porte son nom. Snellius fait usage de sa méthode pour lever divers édifices de la ville de Leyde. Sur la page 204, on trouve la figure qui représente l'intersection des deux arcs de cercle (*).

Le triangle donné est *iuy*, et *o* le quatrième point. On a

$$ui = 62,6,$$
$$yi = 52,$$
$$uy = 110,9,$$
$$yoi = 32^\circ 57',$$
$$you = 64^\circ 40';$$

de là il conclut

$$iyu = 15^\circ 56'.$$

Ensuite abaissant des deux centres des segments capables sur les côtés *iu* et *yu*, il obtient une suite de triangles

(*) Pothenot fut adjoint à La Hire pour continuer la méridienne de Paris au Nord (Lalande, *Astronomie*, n° 2663, 2e édition).

rectangles où l'on peut calculer successivement les côtés et les angles, et parvient facilement à ces distances :

$$oy = 79,3,$$
$$oi = 96,2,$$
$$ou = 118,2.$$

Il serait de toute justice d'attacher désormais à ce procédé le nom de Snellius. Ne pas oublier que l'auteur n'avait que 26 ans. Quel génie ! (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 80.) Il évalue le nombre de grains de sable que peut contenir la sphère céleste d'Archimède, et dans celle de Copernic ; il suppose que 100 grains de sable mis bout-à-bout occupent une longueur de $\frac{1}{10}$ de pied du Rhin.

Il a dédié son premier livre aux États des provinces confédérées, et le second aux deux barons autrichiens.

Dans le chapitre VII et dernier, il fait voir les défauts de la méthode proposée par Maurolycus pour mesurer la terre ; elle consiste à mesurer l'angle de *dépression* sur une montagne dont la hauteur est connue. Il attribue la principale erreur à la *réfraction* qui a lieu à l'horizon, où s'accumulent tant de vapeurs. Il cite un navigateur nommé Patritius, qui prétend prouver que la terre est plane, parce que sortant de Toulon les matelots aperçoivent les montagnes de la Corse : ce qui serait impossible, si la mer était bombée !

Le *Eratosthenes Batavus*, ouvrage très-rare, appartient à M. Prouhet, qui fait une collection d'ouvrages mathématiques avec un discernement digne d'un excellent géomètre, digne d'un érudit consommé : qualités dont la réunion est aussi excessivement rare en deçà du Rhin.

BIBLIOGRAPHIE.

Della vita et delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo duodecimo, et di Gherardo da Sabionetta, astronomo del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da *Baldassare Boncompagni*. In-folio de 109 pages; Roma, 1851.

On dit souvent que nous devons nos connaissances scientifiques aux Grecs et aux Arabes. Il serait plus juste de dire, avec un sentiment de reconnaissance, que nous devons nos sciences à ceux qui ont traduit les ouvrages grecs et arabes. Ce sont là les véritables promoteurs de la renaissance, du rappel de l'esprit humain à toute sa liberté d'action. Gérard de Cremone est un de ces vaillants promoteurs. Il a traduit trois ouvrages de dialectique, dix-sept ouvrages de géométrie, douze ouvrages d'astronomie; onze ouvrages de philosophie; 32 ouvrages de médecine. On en trouve la liste complète dans un *Éloge* de Gérard conservé dans la bibliothèque du Vatican et inséré dans la présente Notice (p. 4 à 7). L'*Almageste* de Ptolémée est le plus important de ces ouvrages. Ayant appris que ce manuscrit existait à Tolède, Gérard s'y est transporté et y a passé plusieurs années pour étudier l'arabe.

L'Italie, terre privilégiée, n'est jamais restée complétement étrangère ni aux lettres, ni aux sciences, et encore aujourd'hui, qui ne connaît ses philosophes, ses géomètres, ses astronomes, ses physiciens?

AVIS.

En 1858, on donnera soit l'analyse, soit l'énoncé de tous les articles contenus dans les journaux suivants.

1° *Journal de Crelle;* 2° *Journal de Gunther;* 3° *Quarterly journal* (*Cayley* et *Sylvester*); 4° *Annales de Tortolini.*

Les thèses qui nous seront adressées.

M. le professeur Mathieu (Émile) nous a communiqué les solutions de questions *difficiles* proposées et non résolues dans le traité de M. Bertrand; elles seront successivement publiées dans les *Annales*, ainsi que les questions analogues des traités de M. E. Catalan et Rouché; modèle de gymnastique mathématique propre à former de vigoureux athlètes.

Les ouvrages suivants sont en voie de traduction.

1°. *Conic curves*, de G. Salmon, par M. *Poudra.*

2°. *Geometrische Entwickelung*, de Steiner, par M. *Dewulf*, officier du génie.

3°. *Calcul of operations*, de Carmichael, par M. le professeur *Rey.*

4°. *Theoria motus planetarum*, de Gauss, par M. le professeur *Dieu.*

L'*Astronomie*, de Brunow, par M. le professeur *Terquem* (*Paul*), est terminée.

On est prié de faire les figures à part et de dimension à pouvoir entrer dans le texte des *Annales*.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME III.)

Bibliographie.

Historique.

Biographie.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des auteurs d'articles sont précédés d'un astérique.)

ERRATA.

Page 18, ligne 2, *au lieu de* les, *lisez* le.

18, ligne 2, *au lieu de* livres, *lisez* livre.

22, ligne 2 en remontant, *au lieu de* que *s* est, *lisez* qui soit.

24, ligne 11, *au lieu de* moins plus, *lisez* moins pas plus.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

19

